

Dalle frazioni agli insiemi numerici

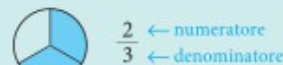
Tratto dal testo "CONTACI"
AAVV Ed. Zanichelli

1 L'INTERO E LE PARTI

Nella lezione si fanno esercizi sulle frazioni.

2 RIVEDIAMO LE FRAZIONI

Le frazioni



Due terzi del cerchio sono colorati.

Se una frazione è maggiore di uno può essere scritta come **numero misto**.

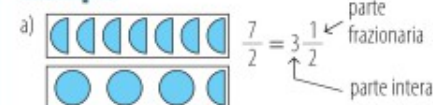
Frazioni equivalenti

Per **espandere** una frazione si moltiplicano sia il numeratore sia il denominatore per uno stesso numero diverso da zero.

Per **ridurre** una frazione si dividono sia il numeratore sia il denominatore per uno stesso numero diverso da zero.

Quando una frazione viene espansa o ridotta, il suo valore rimane invariato.

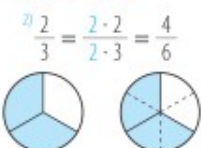
Esempio



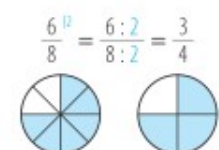
b) $2 \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$



Esempio



Esempio



3 RIVEDIAMO LE OPERAZIONI CON I NUMERI INTERI

Addizione e sottrazione con numeri interi



Tutte le addizioni e le sottrazioni possono essere pensate usando il modello del termometro. Prima però bisogna togliere le parentesi.

Esempi

$$-7 - (-8) = -7 + 8 = 1$$

$$6 + (-9) = 6 - 9 = -3$$

$$-5 - (+3) = -5 - 3 = -8$$

$$-4 + (+7) = -4 + 7 = 3$$

$$-5 + 5 = 0$$

$$6 + (-6) = 6 - 6 = 0$$

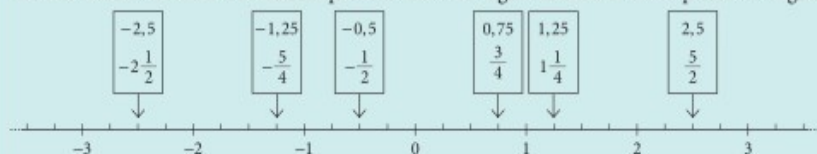
Moltiplicazione e divisione

Il prodotto e il quoziente di due numeri concordi (con lo stesso segno) è positivo.

Il prodotto e il quoziente di due numeri discordi (con segni diversi) è negativo.

4 FRAZIONI CON IL SEGNO. ADDIZIONI E SOTTRAZIONI

Anche i numeri decimali e le frazioni possono avere un segno davanti ed essere positive e negative.



Addizione e sottrazione di frazioni

La somma (o la differenza) di frazioni con lo stesso denominatore, è una frazione che ha

- per numeratore la somma (o la differenza) dei numeratori
- per denominatore il denominatore comune.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Se le frazioni hanno denominatori diversi, devono prima essere portate allo stesso denominatore.

Quando si opera con frazioni positive e negative valgono le stesse regole dei segni dei numeri interi.

5 FRAZIONI CON IL SEGNO. LA MOLTIPLICAZIONE

Il prodotto di frazioni si esegue facendo

- il prodotto dei numeratori
- il prodotto dei denominatori.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

La frazione di un numero può essere calcolata moltiplicando quel numero per la frazione.

Quando si opera con frazioni positive e negative valgono le stesse regole dei segni della moltiplicazione con i numeri interi.

Esempi

$$-3 \cdot (-4) = 12 \quad \frac{-6}{-3} = 2$$

$$3 \cdot (-4) = -12 \quad \frac{8}{-2} = -4$$

Esempi

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$$

Esempi

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Calcola } \frac{2}{3} \text{ di } 60 \text{ €}.$$

$$\frac{2}{3} \cdot 60 \text{ €} = \frac{2 \cdot 60}{3} = 40 \text{ €}$$

$$-6 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{6}{1} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{6 \cdot 1}{1 \cdot 2} = -3$$

6 FRAZIONI CON IL SEGNO. LA DIVISIONE

Esempi

La divisione tra frazioni si esegue tramite una moltiplicazione: il dividendo si moltiplica per la frazione inversa del divisore.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Esempi

$$\begin{aligned} \frac{3}{7} : \frac{6}{5} &= \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 6} = \frac{5}{14} \\ -\frac{4}{5} : 8 &= -\frac{4}{5} : \frac{8}{1} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 8} = -\frac{1}{10} \\ \left(-\frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{9}{2}\right) &= -\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{-3 \cdot (-2)}{4 \cdot 9} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Per le frazioni positive e negative valgono le regole dei segni dei numeri interi.

7 ESPRESSIONI

Nella lezione ci si esercita a calcolare il valore di espressioni frazionarie.

8 NUMERI E OPERAZIONI VERSO GLI INSIEMI NUMERICI

Frazioni e numeri decimali

Le frazioni corrispondono a **numeri decimali limitati** oppure a **numeri decimali illimitati periodici***.

Esempio

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} &= 0,4 & \frac{1}{3} &= 0,33333... = 0,\overline{3} \\ \frac{1}{8} &= 0,125 & 1\frac{5}{9} &= \frac{16}{9} = 1,55555... = 1,\overline{5} \\ \frac{6}{100} &= 0,06 & \frac{3}{22} &= 0,1363636... = 0,1\overline{36} \end{aligned}$$

Le proprietà delle operazioni

Per l'addizione e la moltiplicazione vale la proprietà **commutativa**:

$$a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a$$

Per l'addizione e la moltiplicazione vale la proprietà **associativa**:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Per la sottrazione e la divisione non valgono né la proprietà commutativa, né la proprietà associativa.

Quando una somma o una differenza vengono moltiplicate oppure divise per un numero, possiamo applicare la proprietà **distributiva**:

$$\begin{aligned} a(b + c) &= ab + ac & \frac{a+b}{c} &= \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \\ a(b - c) &= ab - ac & \frac{a-b}{c} &= \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \end{aligned}$$

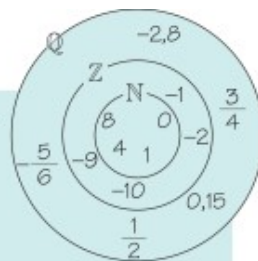
*Si rimanda alla scheda di pagina 38 per una trattazione più completa dell'argomento.

9 I NUMERI RAZIONALI

Per contare usiamo i numeri 0, 1, 2, 3, ... Questi numeri formano l'**insieme dei numeri naturali** $\mathbb{N}$.

I numeri ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... formano l'**insieme dei numeri interi** $\mathbb{Z}$.

Tutti i numeri che si possono scrivere sotto forma di divisione fra due numeri interi, formano l'**insieme dei numeri razionali** $\mathbb{Q}$.



Opposto di un numero

Due numeri la cui somma è zero si dicono **opposti**.

L'opposto del numero zero è lo zero stesso.

$$a + (-a) = 0$$

Numero a	Opposto del numero $-a$
3	-3
-6	6
0	0

Inverso di un numero

Due numeri il cui prodotto è uno si dicono **inversi** l'uno dell'altro.

Il numero zero non ha l'inverso.

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Numero a	Inverso del numero $\frac{1}{a}$
6	$\frac{1}{6}$
-2	$-\frac{1}{2}$

Valore assoluto

La distanza di un numero dallo zero sulla retta dei numeri si chiama **valore assoluto** di quel numero.

Il valore assoluto di 0 è 0.

Il valore assoluto del numero a si indica con $|a|$.

Numero a	Valore assoluto $ a $
8	8
-11	11
0	0

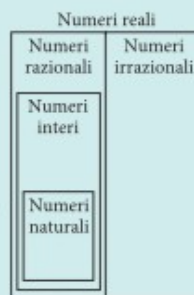
10 I NUMERI REALI

I numeri irrazionali

All'**insieme dei numeri irrazionali** appartengono i numeri decimali illimitati non periodici. Questi numeri non derivano da una divisione. L'operazione che li origina è l'estrazione di radice. Anche π , ovvero il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro, è un numero irrazionale.

I numeri reali $\mathbb{R}$

L'**insieme dei numeri reali** $\mathbb{R}$ è formato dai numeri razionali e dai numeri irrazionali.



DAL NUMERO DECIMALE ALLA FRAZIONE GENERATRICE

Tutti i numeri decimali limitati e tutti i numeri decimali illimitati periodici possono essere scritti sotto forma di frazione.

Un numero decimale limitato si scrive sotto forma di frazione trasformandola in una frazione in decimi, centesimi, millesimi...

$$0,91 = \frac{91}{100} \quad 3,428 = \frac{3428}{1000} = \frac{857}{250} \quad 109,3 = \frac{1093}{10} \quad 1,8 = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

Per tutti i numeri periodici semplici con una sola cifra dopo la virgola possiamo aiutarci con le frazioni in noni.

Da questa sequenza viene fuori un risultato piuttosto curioso: $0,9 = 1$.

I NONI

$$\frac{1}{9} = 0,11111... = 0,1$$

$$\frac{2}{9} = 0,22222... = 0,2$$

$$\frac{3}{9} = 0,33333... = 0,3$$

$$\dots$$

$$\frac{7}{9} = 0,77777... = 0,7$$

$$\frac{8}{9} = 0,88888... = 0,8$$

$$\frac{9}{9} = 0,99999... = 0,9$$


$$2,\bar{4} = 2 + 0,\bar{4} = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}$$

$$5,\bar{7} = 5 + 0,\bar{7} = 5 + \frac{7}{9} = \frac{52}{9}$$

Un frazione può essere trasformata in un numero decimale eseguendo la divisione. Il numero decimale che si ottiene può essere un **numero decimale limitato** oppure **illimitato periodico**.

I numeri periodici possono essere di due tipi:

- **periodici semplici**, se subito dopo la virgola comincia il periodo
- **periodici misti**, se dopo la virgola il periodo è preceduto da alcune cifre decimali, dette antiperiodo.

$$\frac{5}{6} = 0,83333... = 0,8\bar{3}$$

antiperiodo $\uparrow$ periodo

periodico semplice	periodico misto
$2,66666... = 2,\bar{6}$	$0,455555... = 0,4\bar{5}$
$0,151515... = 0,1\bar{5}$	$1,23474747... = 1,234\bar{7}$

Per sapere quali frazioni danno origine a numeri decimali limitati e quali a numeri decimali illimitati, si può scomporre in fattori primi il denominatore.

$$\frac{12}{25} = \frac{12}{5^2} = \frac{12 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{12 \cdot 4}{100} = \frac{48}{100} = 0,48$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{3 \cdot 125}{1000} = \frac{375}{1000} = 0,375$$

$$\frac{9}{40} = \frac{9}{2^3 \cdot 5} = \frac{9 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5 \cdot 5^2} = \frac{9 \cdot 25}{1000} = \frac{225}{1000} = 0,225$$

Se nel denominatore compaiono solo i fattori primi 2 e/o 5, la frazione si può portare a una frazione in decimi, centesimi, millesimi..., pertanto la divisione darà un numero **decimale limitato**.

$$\frac{5}{9} = \frac{5}{3 \cdot 3} = 0,5555... = 0,5\bar{5}$$

$$\frac{8}{33} = \frac{8}{3 \cdot 11} = 0,242424... = 0,2\bar{4}$$

Se nel denominatore non compaiono né il 2 né il 5, la divisione dà origine a un numero decimale **periodico semplice**.

$$\frac{7}{12} = \frac{7}{2^2 \cdot 3} = 0,58333... = 0,58\bar{3}$$

$$\frac{11}{30} = \frac{11}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 0,3666... = 0,3\bar{6}$$

Se nel denominatore compaiono il 2 e/o il 5 insieme ad altri numeri, la divisione dà origine a un numero decimale **periodico misto**.