DAL TERRAZZO DI PEANO AL CAVOLO ROMANO

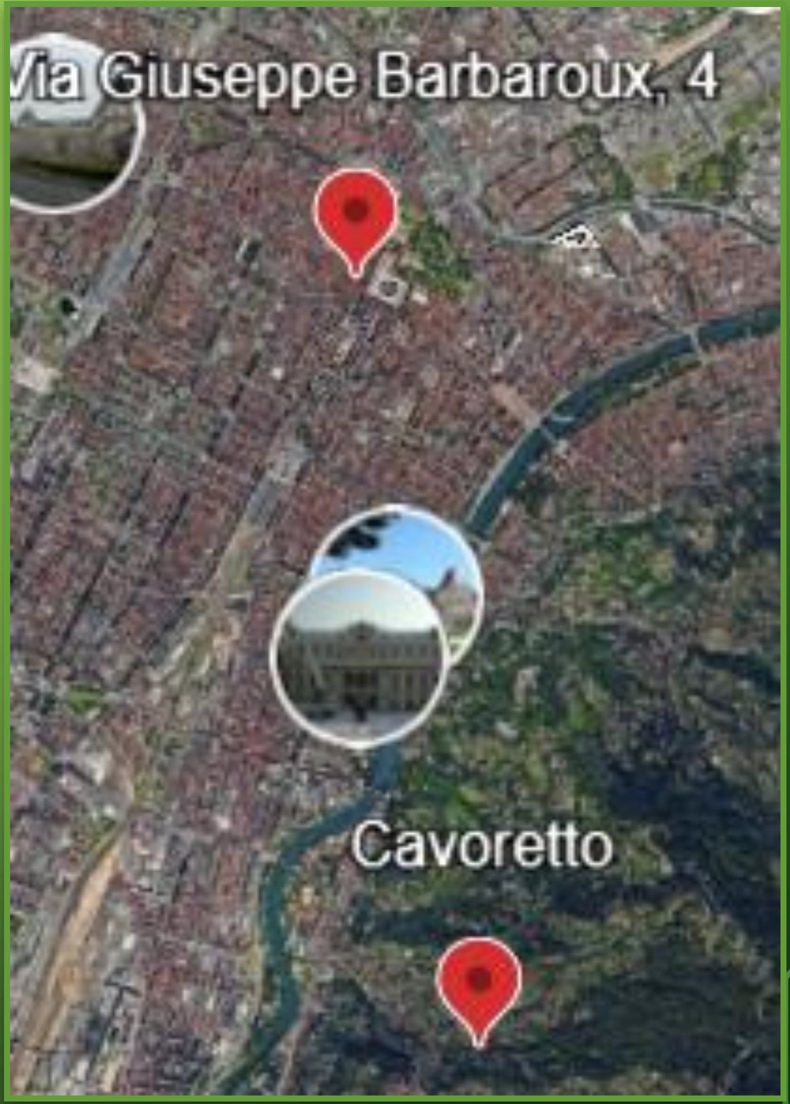
VIAGGIO ALLA SCOPERTA DEI FRATTALI

IC Foscolo Cl. 2L
Prof.ssa Daniela Favale
A.S. 2024/2025

PEANO: MATEMATICO E INSEGNANTE

Spinetta (Cuneo) 1858 – Torino 1932

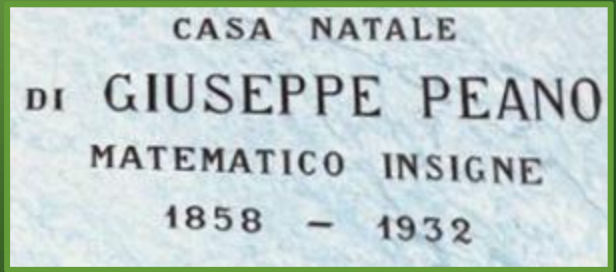
- Abitava in via Barbaroux a Torino, ma aveva una villa a Cavoretto, in collina
- Fu docente universitario a Torino
- Era insegnante amato dai suoi studenti, sempre alla ricerca di stimoli nuovi: dalla matematica divertente ai collegamenti tra matematica e realtà
- Voleva infondere nei giovani l'amore per la scienza



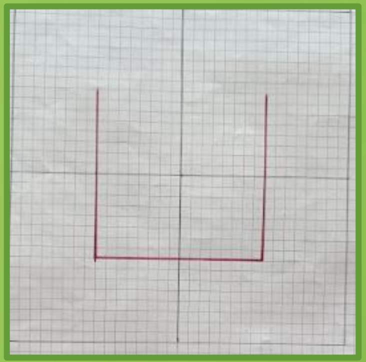
«VI INSEGNERÒ A TRASFORMARE LA MATEMATICA IN PANE»

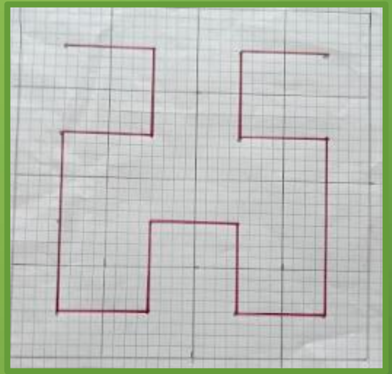
Riuscì a dimostrare che è possibile ricoprire interamente una superficie con una linea.

Questa curva, poi perfezionata da Hilbert, è stata riprodotta sul terrazzo della sua casa a Cavoretto (TO), ma è stata distrutta in seguito a lavori di ristrutturazione.



LA CURVA DI PEANO: COSTRUZIONE





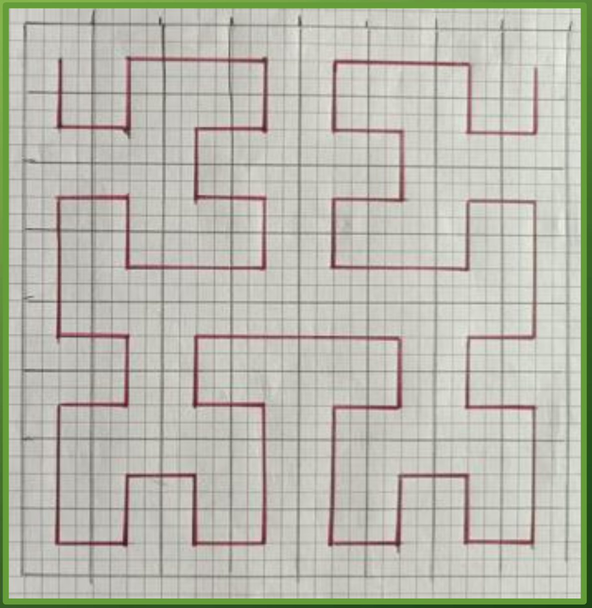
Si genera con un metodo ricorsivo:

- si suddivide un quadrato di lato unitario in quattro quadratini di lato $\frac{1}{2}$: ogni punto del quadrato dista dalla curva meno di $\frac{1}{2}$;

- si suddivide quindi in 16 quadratini: ogni punto del quadrato dista dalla curva meno di $\frac{1}{4}$;

- si suddivide in 32 quadratini: ogni punto del quadrato dista dalla curva meno di $1/8$;

…

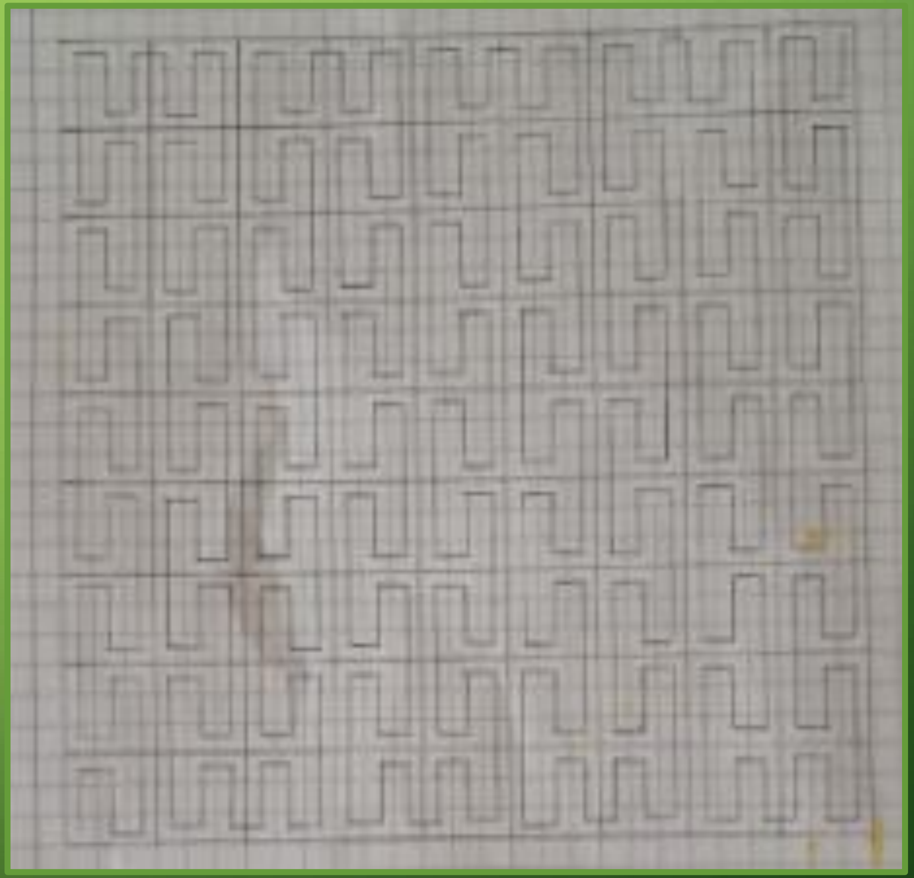


LA CURVA DI PEANO - HILBERT:

La curva che si genera in questo modo ricopre tutti i punti del piano.

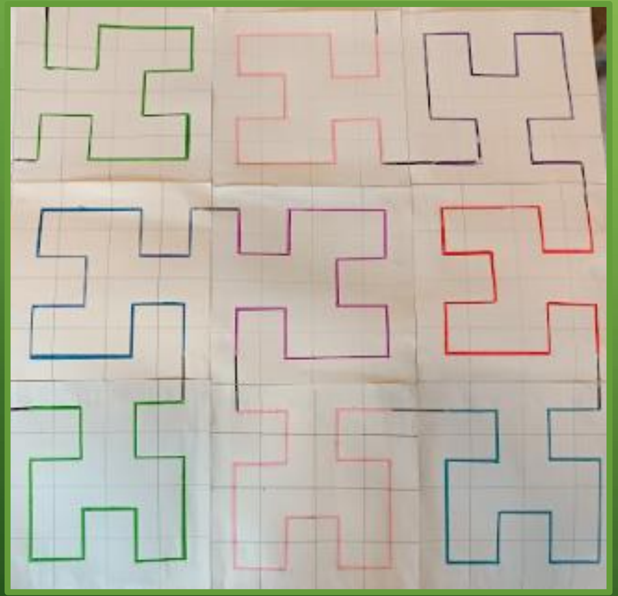
Ideata da Peano, è stata perfezionata da Hilbert, per cui prende il nome di entrambi.

Si tratta di un modello di curva frattale.



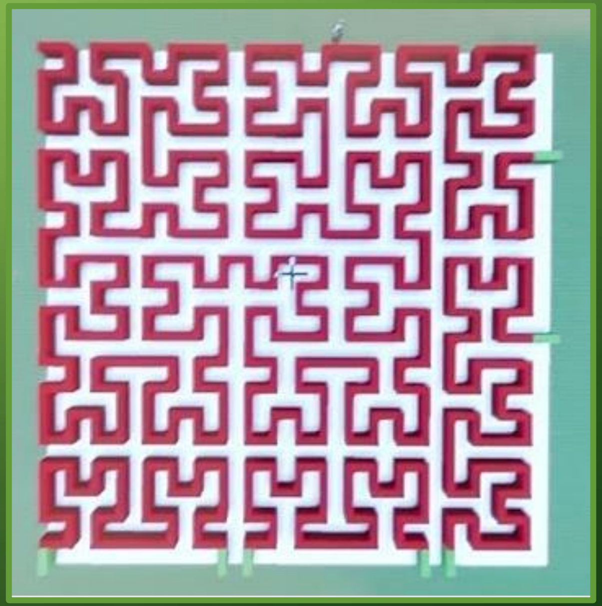
LE NOSTRE COSTRUZIONI:

GRAFICA



CON I LEGO

CON MINECRAFT



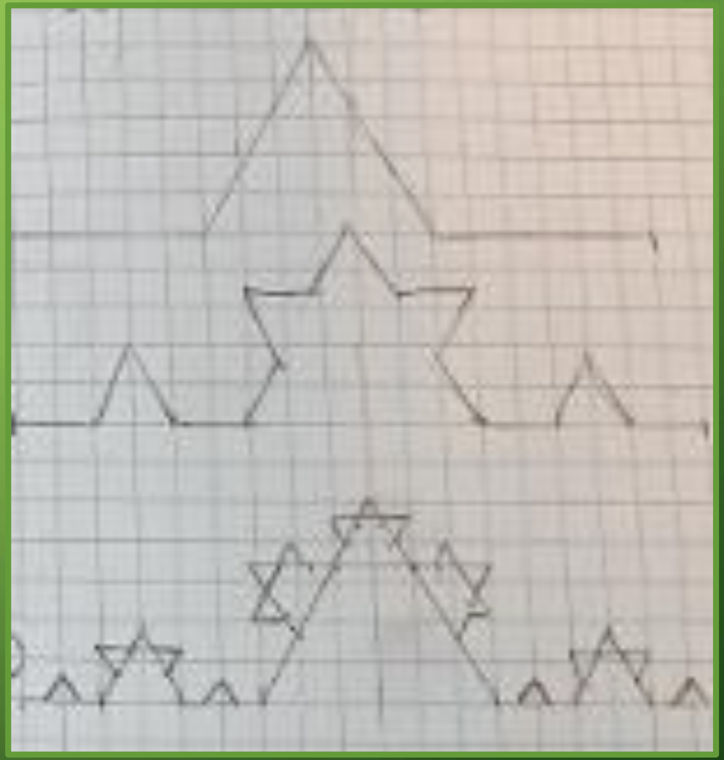
IL MERLETTO DI KOCH

E' stata ideata dal matematico svedese Helge von Koch nel 1904.

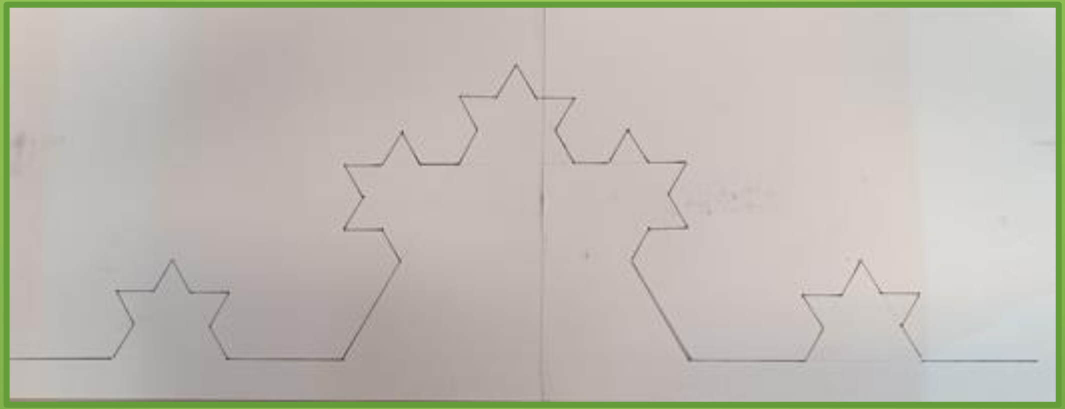
E' frastagliata e ha lunghezza infinita.

E' una curva autosimile in quanto contiene una sua parte che è una trasformazione della curva intera attraverso un'omotetia (una trasformazione del piano che dilata o contrae gli oggetti mantenendo invariati gli angoli).

Ad ogni tappa la lunghezza della curva diventa uguale a 4/3 della lunghezza che aveva nella tappa precedente.



IL MERLETTO DI KOCH: COSTRUZIONE

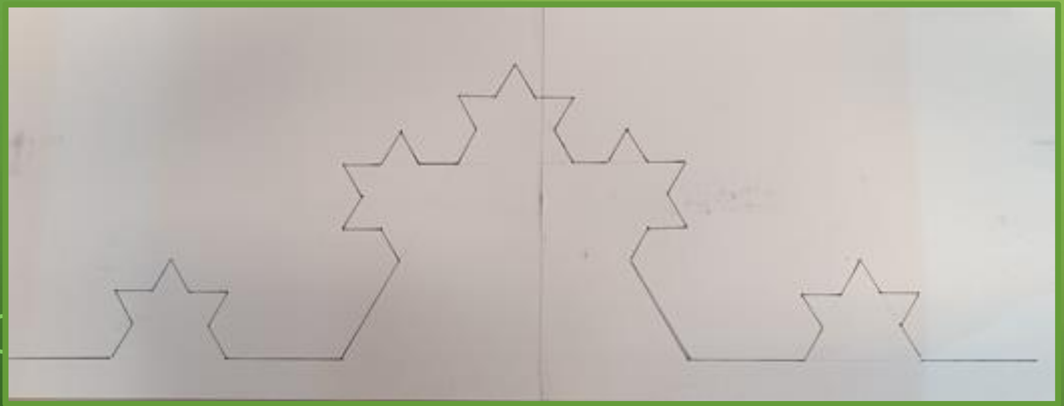


Si genera secondo questo algoritmo:

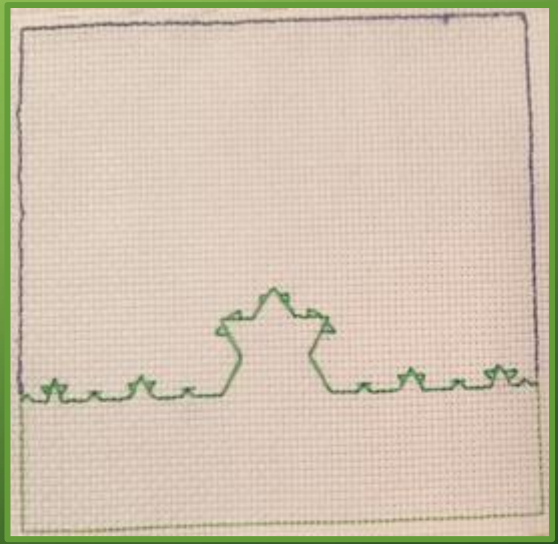
- si divide un segmento in tre parti uguali
- si cancella il segmento centrale e lo si sostituisce con due segmenti della stessa lunghezza in modo da costruire un triangolo equilatero
- si ripete il procedimento da capo

LE NOSTRE COSTRUZIONI

GRAFICA



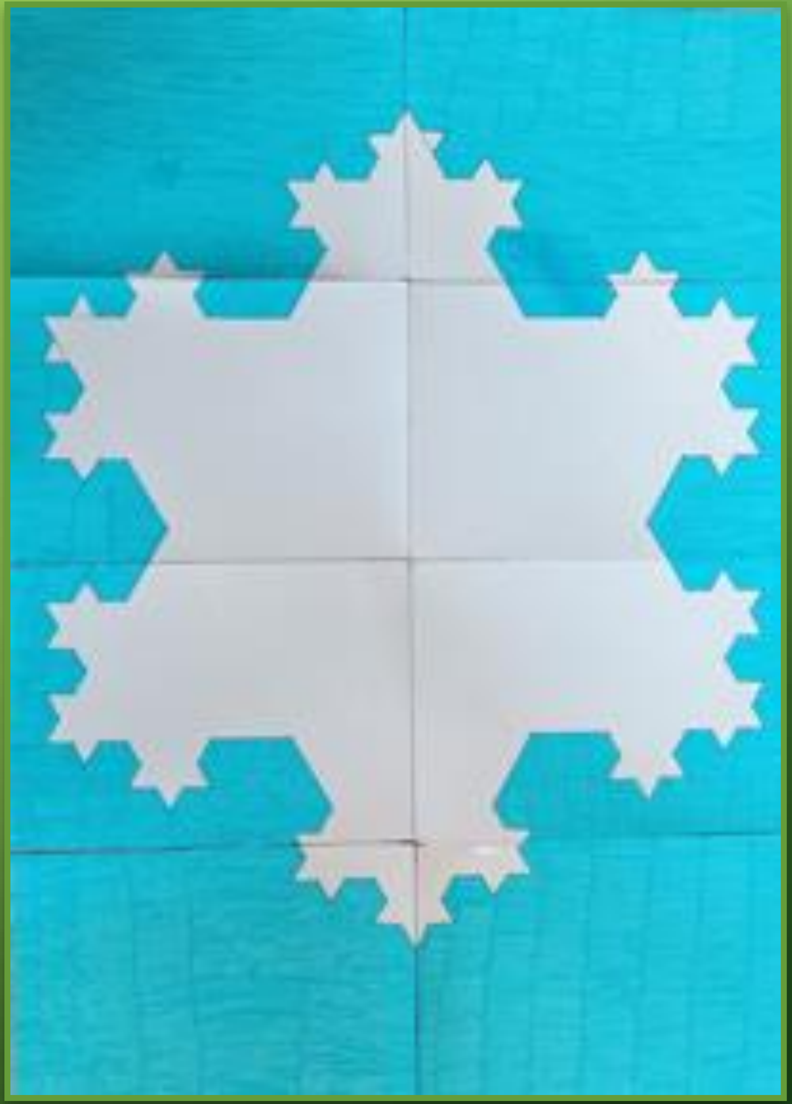
RICAMATA



IL FIOCCO DI NEVE DI KOCH: COSTRUZIONE

Si parte da un triangolo equilatero e si procede secondo questo algoritmo:

- si divide ogni lato in tre parti uguali
- si cancella il segmento centrale e lo si sostituisce con due segmenti della stessa lunghezza in modo da costruire un triangolo equilatero
- si ripete il procedimento da capo



IL FIOCCO DI NEVE DI KOCH: DIMENSIONI

Il fiocco di neve ha:

- perimetro infinito: ad ogni passo, il perimetro aumenta di $1/3$ e quindi diventa uguale ai $4/3$ del perimetro misurato nel passo precedente.
- area finita: la curva è chiusa

lato	perimetro
l	$3\ l$
$\frac{l}{3}$	$4\ l$
$\frac{l}{9}$	$\frac{16}{3}\ l$
$\frac{l}{27}$	$\frac{64}{3}\ l$

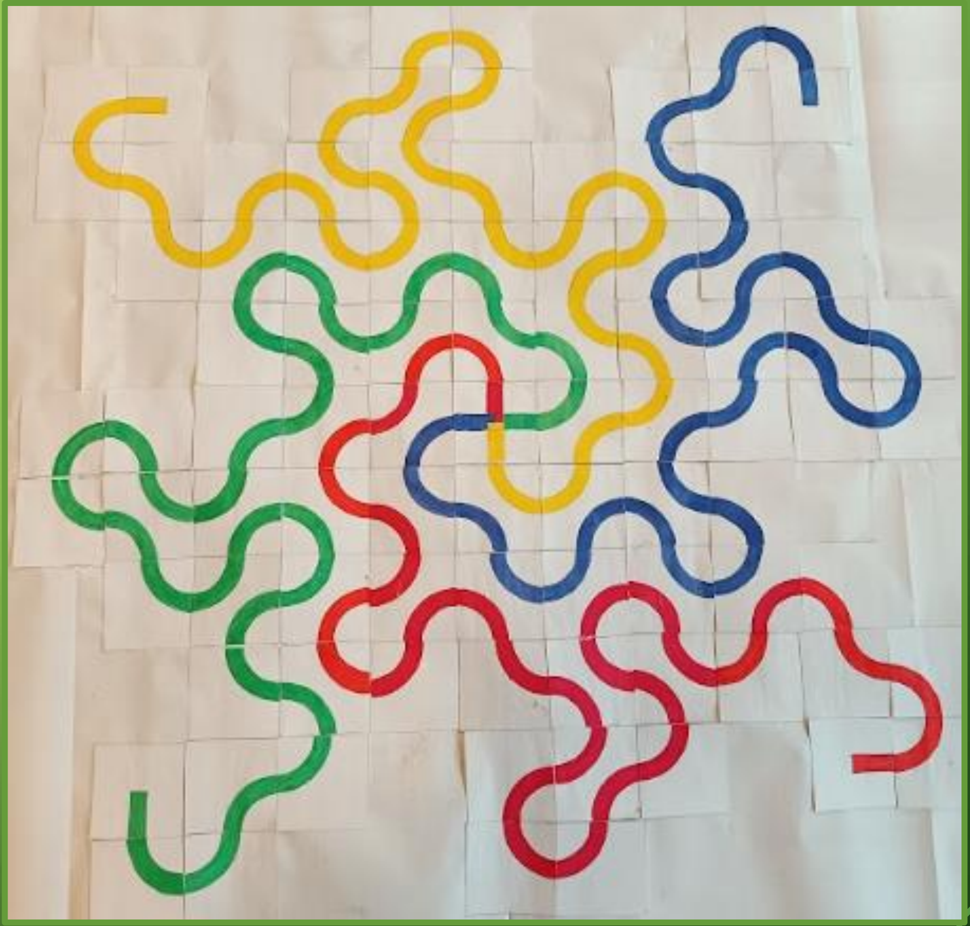
lato	altezza	area
l	$\frac{\sqrt{3}}{2}l$	$\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$
$\frac{l}{3}$	$4\ l$	$\frac{\sqrt{3}}{36}l^2$
$\frac{l}{9}$	$\frac{16}{3}\ l$	$\frac{\sqrt{3}}{324}l^2$

LA CURVA DEL DRAGO DI HEIGHWAY:

E' stata ideata da Heighway, fisico della NASA, in collaborazione con Banks e Harter; la curva è poi stata descritta da Gardner in un libro sui giochi matematici.

Deve il suo nome alla somiglianza con un drago.

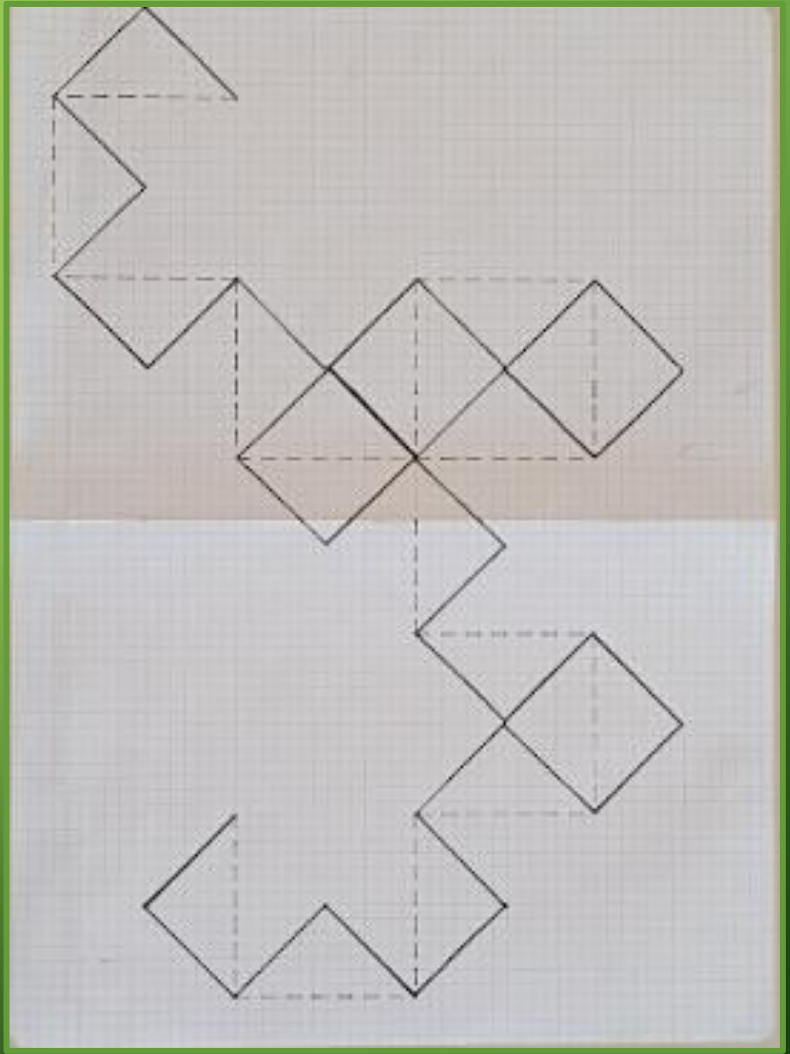
La curva è un frattale che non si interseca.



LA CURVA DEL DRAGO DI HEIGHWAY: COSTRUZIONE

Si parte da un segmento di base: poi lo si sostituisce con due segmenti uguali che formano tra di loro un angolo retto e si compie una rotazione di 45° alternativamente a destra e a sinistra.

Quindi si ripete il procedimento.

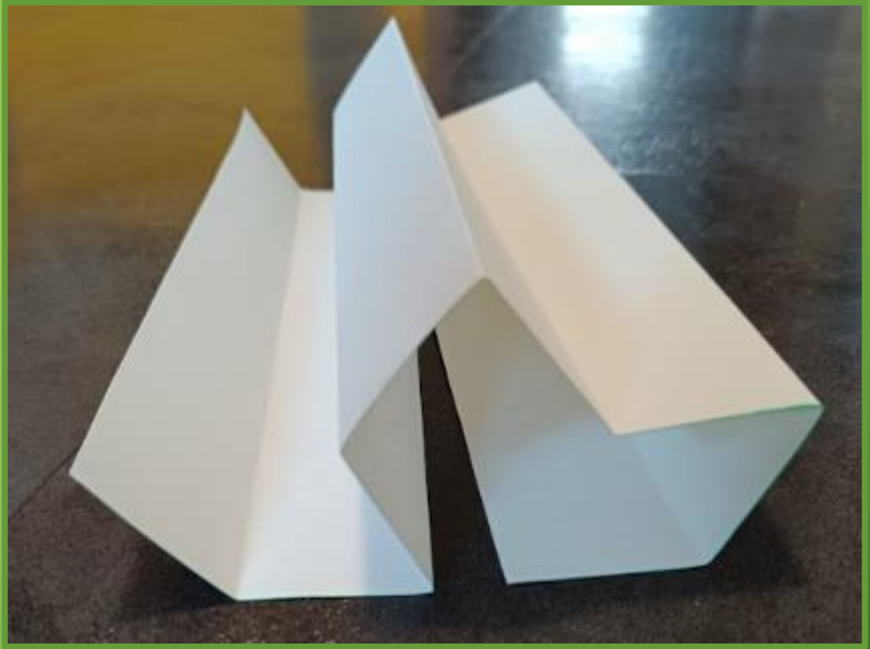


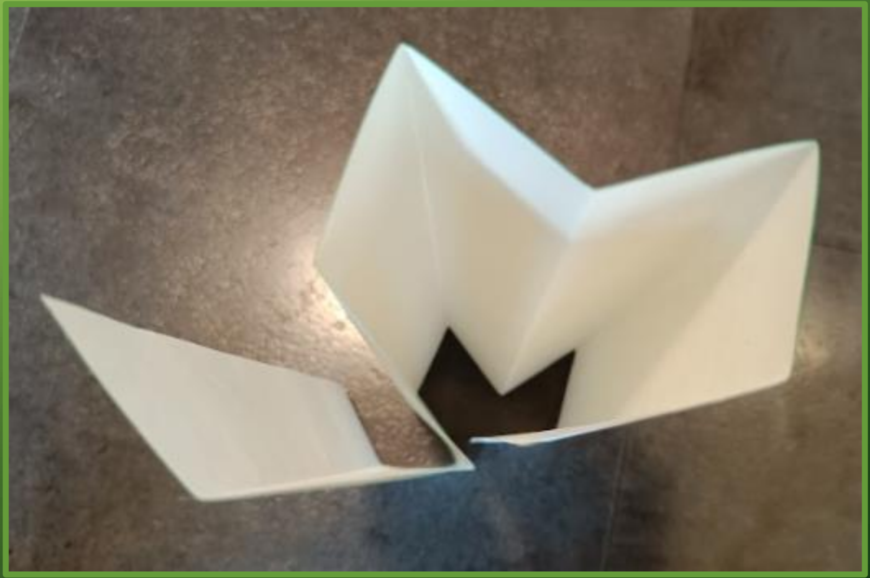
LA CURVA DEL DRAGO DI HEIGHWAY: COSTRUZIONE

Si prende una striscia di carta e la si piega a metà a destra.

Quindi si itera il procedimento fino a quando lo spessore del foglio lo permette.

Aprendo la striscia piegata, il suo profilo descrive la curva del drago.





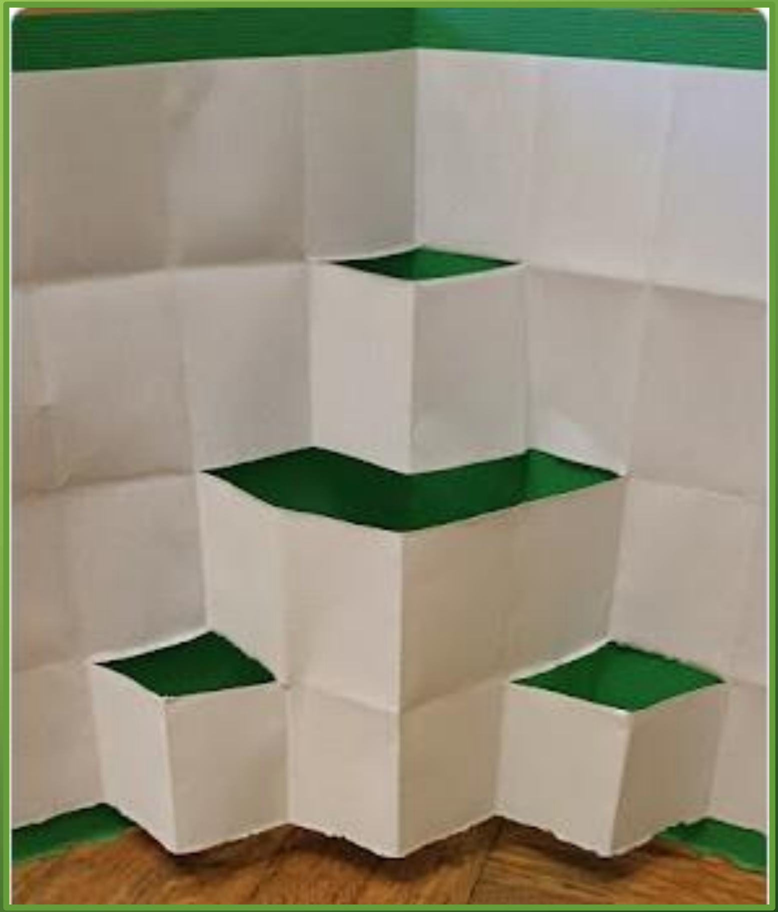
IL TRIANGOLO DI SIERPINSKI

- E' un frattale autosimilare descritto dal matematico polacco Waclaw Sierpinski nel 1915.
- E' generato da un pattern che si ripete sempre allo stesso modo.
- Si parte da un triangolo equilatero.
- Si indicano i punti medi di ciascun lato e si uniscono tra di loro.
- Si ripete l'operazione su ciascuno dei triangoli non capovolti.

IL TRIANGOLO DI SIERPINSKI: MISURE DEI TRIANGOLI SUCCESSIVI

Misure relative ai triangoli che si formano ad ogni passaggio successivo:

lato	perimetro	altezza	area
l	*3 l*	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ l$	$\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$
$\frac{l}{2}$	$\frac{3}{2}\ l$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\ l$	$\frac{\sqrt{3}}{16}l^2$
$\frac{l}{4}$	$\frac{3}{4}\ l$	$\frac{\sqrt{3}}{8}\ l$	$\frac{\sqrt{3}}{64}l^2$



IL TRIANGOLO DI SIERPINSKI: RELAZIONI TRA LE MISURE

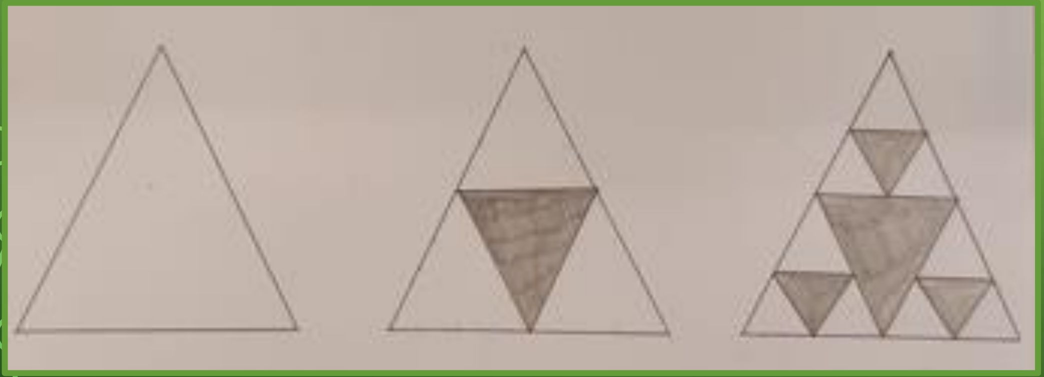
I triangoli che si costruiscono sono simili tra di loro:

- Ad ogni passaggio successivo il lato, il perimetro e l'altezza si dimezzano, mentre l'area si riduce di un quarto.
- Il rapporto di similitudine riferito alle misure lineari è $k = \frac{1}{2}$, mentre quello tra le aree è $k^2 = \frac{1}{4}$.

MOSAICO DEL PAVIMENTO S.MARIA IN TRASTEVERE A ROMA

IL TRIANGOLO DI SIERPINSKI: COME VARIANO AREA E PERIMETRO

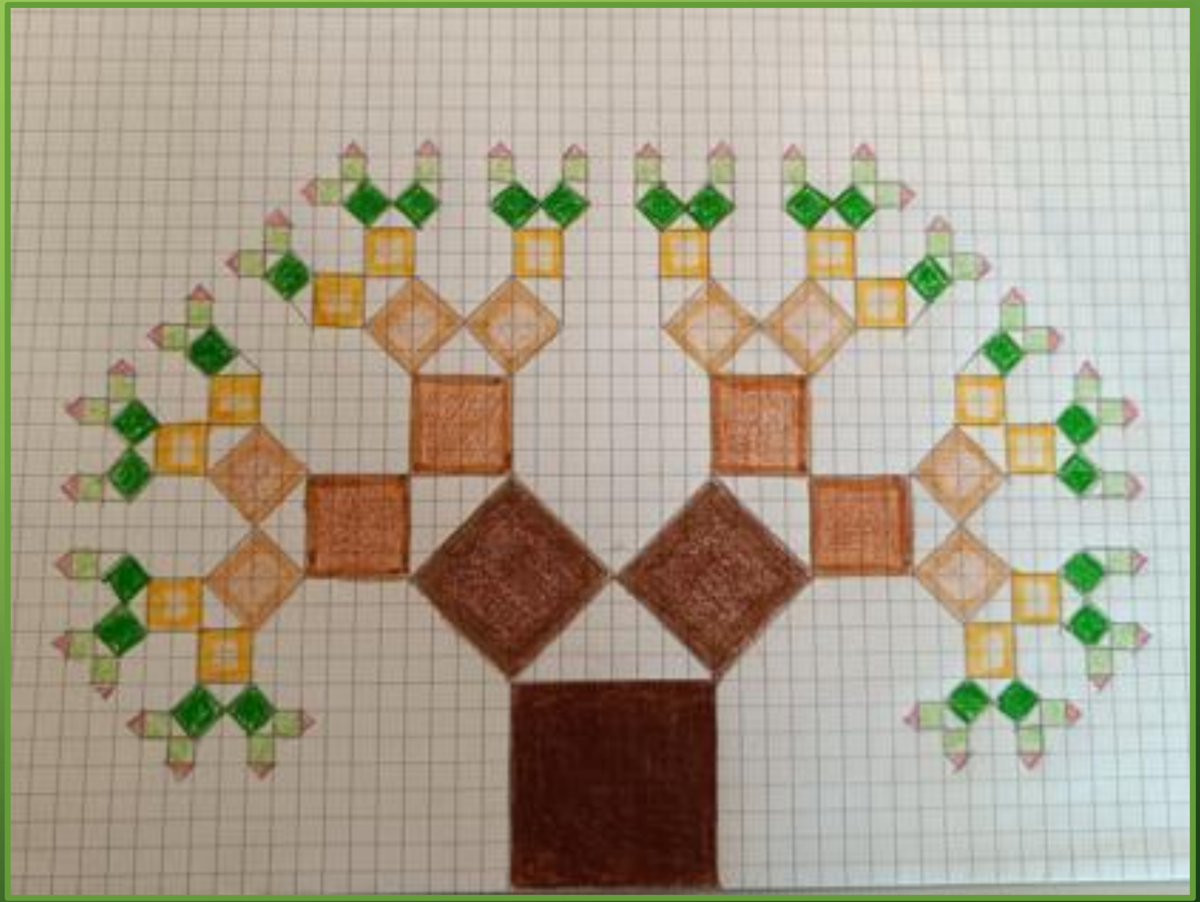
Osserviamo la parte bianca (immaginiamo la parte nera come se fossero dei buchi): mentre il perimetro aumenta ad ogni passaggio tendendo all'infinito, l'area diminuisce tendendo a zero.



Lato triangolo bianco	Perimetro parte bianca	Altezza triangolo bianco	Area parte bianca
l	$3\ l$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ l$	$\frac{\sqrt{3}}{4} l^2$
$\frac{l}{2}$	$\frac{9}{2}\ l$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\ l$	$\frac{3\sqrt{3}}{16} l^2$
$\frac{l}{4}$	$\frac{27}{4}\ l$	$\frac{\sqrt{3}}{8}\ l$	$\frac{9\sqrt{3}}{64} l^2$

L'ALBERO DI PITAGORA

Ideato dall'ingegnere olandese Bosman, è un frattale che riproduce il teorema di Pitagora.

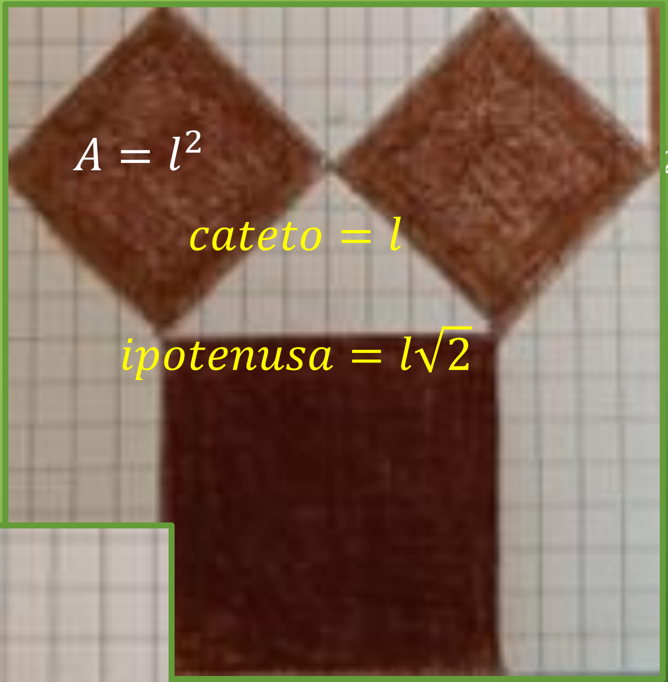


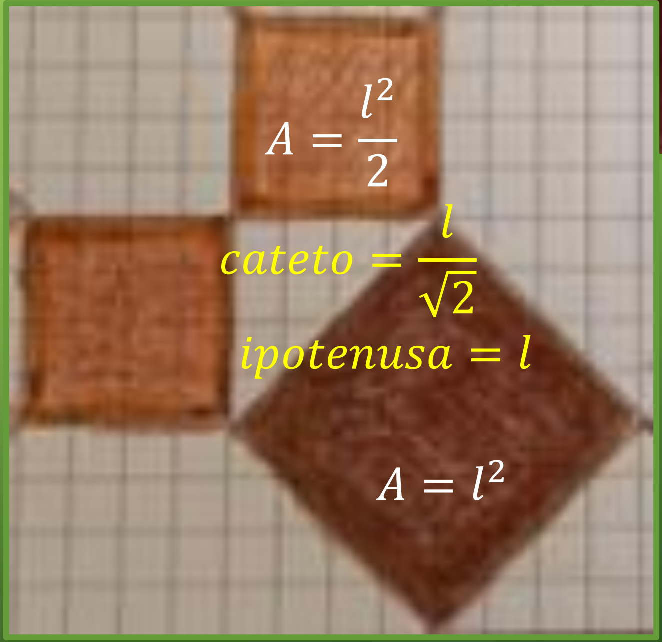
L'ALBERO DI PITAGORA: COSTRUZIONE

Si parte da un quadrato.

1. Su uno dei suoi lati si costruisce un triangolo rettangolo isoscele.
2. Quindi su ciascuno dei due cateti si costruisce un quadrato.

Poi si ripete il procedimento.





L'ALBERO DI PITAGORA: MISURE E RELAZIONI

Il teorema di Pitagora dice che «il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti».

Perciò la somma delle aree dei quadrati più piccoli è uguale all'area del quadrato iniziale, in quanto il teorema di Pitagora si applica ad ogni passaggio.

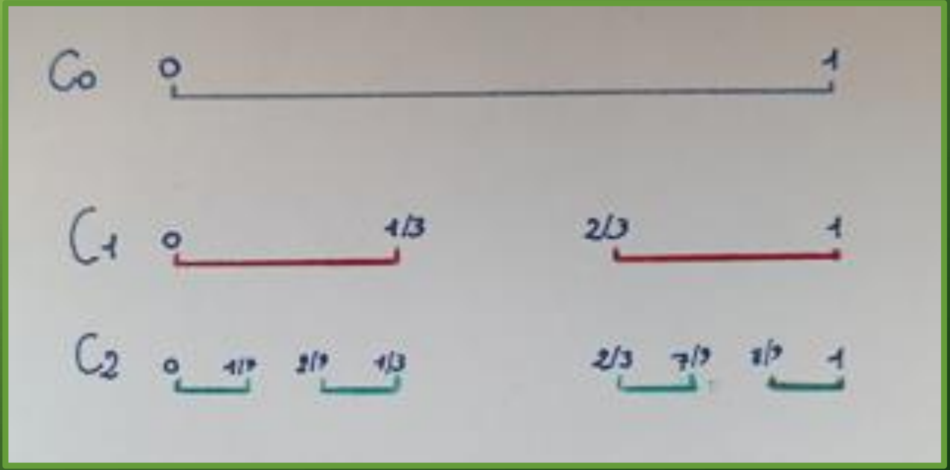
cateto	ipotenusa	Area quadrato sul cateto	Area quadrato sull'ipotenusa
l	$l\sqrt{2}$	l^2	$2l^2$
$\frac{l}{\sqrt{2}}$	l	$\frac{l^2}{2}$	l^2

LA SCATOLA FRATTALE

E' un frattale generato da un'omotetia combinata con un'opportuna traslazione.

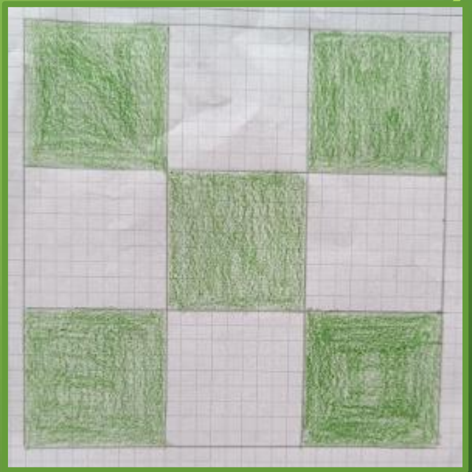
Si parte da un quadrato e su ciascuno dei quattro lati si determina una copia dell'insieme di Cantor, cioè ciò che resta di un segmento diviso in tre parti uguali e privato della parte centrale quando si itera il procedimento all'infinito.

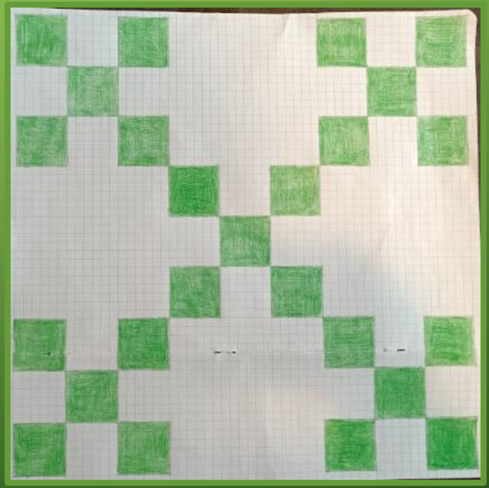
Segmento	lunghezza
Primo	da 0 a 1
Secondo	da 0 a 1/3 da 2/3 a 1
terzo	da 0 a 1/9 da 2/9 a 1/3 da 2/3 a 7/9 da 8/9 a 1



LA SCATOLA FRATTALE: COSTRUZIONE

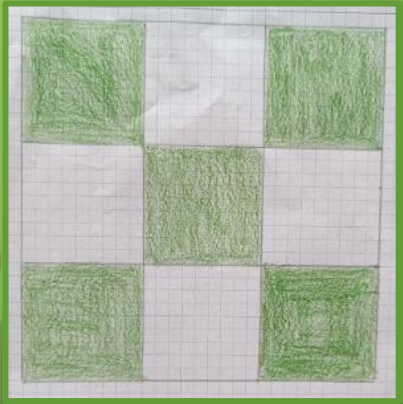
- Si costruisce un quadrato.
- Si dividono i suoi lati in tre parti uguali e si costruiscono quindi 9 quadrati. Se ne colorano solo 5, alternandoli opportunamente.
- Si itera il procedimento suddividendo solo i quadrati colorati (come si vede nella figura)

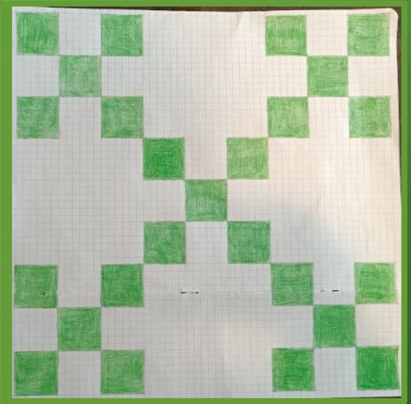




LA SCATOLA FRATTALE: MISURE DELLE PARTI COLORATE

Ecco le misure del lato, del perimetro e dell'area dei singoli quadrati e dell'intera scatola (parte colorata)





Anche qui il perimetro aumenta ad ogni passaggio tendendo all'infinito, mentre l'area diminuisce tendendo a zero.

SINGOLO QUADRATO

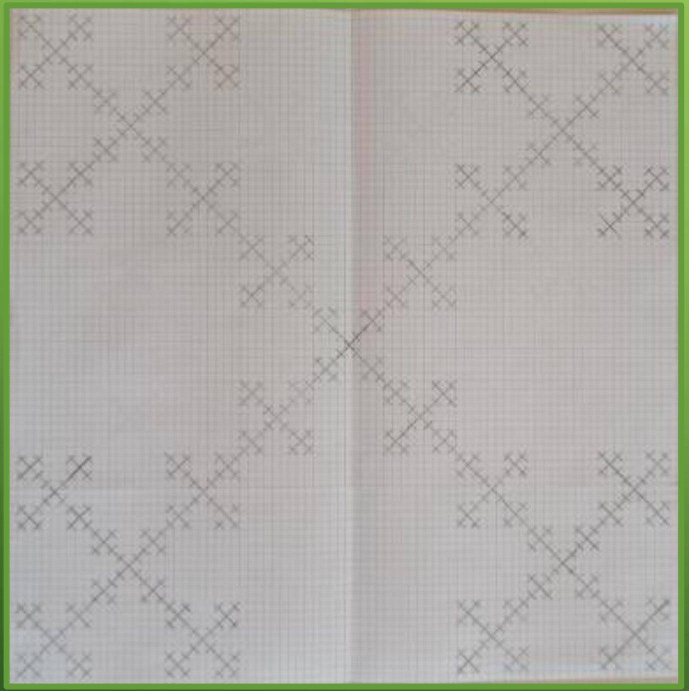
Lato	Perimetro	Area
l	$4\,l$	l^2
$\frac{l}{3}$	$\frac{4}{3}\,l$	$\frac{l^2}{9}$
$\frac{l}{9}$	$\frac{4}{9}\,l$	$\frac{l^2}{81}$

INTERA SCATOLA (PARTE COLORATA)

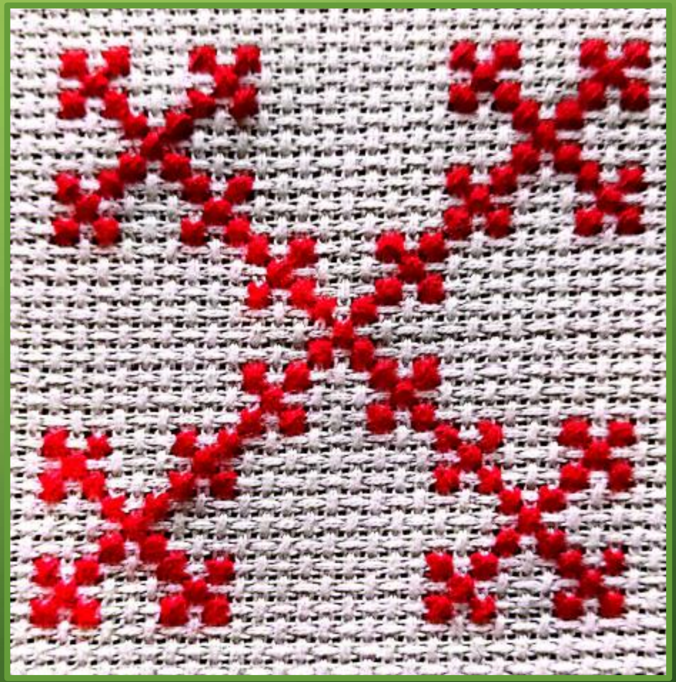
Lato	Perimetro totale area colorata	Area totale parte colorata
l	$4\,l$	l^2
$\frac{l}{3}$	$\frac{20}{3}\,l$	$5\,\frac{l^2}{9}$
$\frac{l}{9}$	$\frac{100}{9}\,l$	$25\,\frac{l^2}{81}$

LE NOSTRE COSTRUZIONI:

GRAFICA

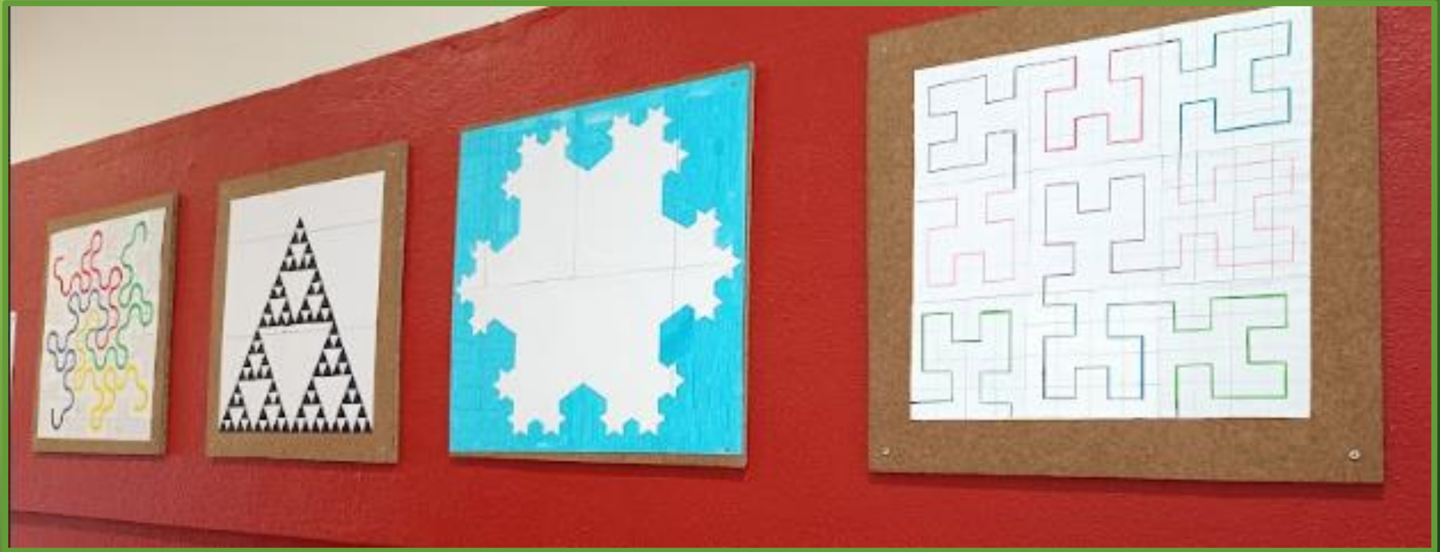


A PUNTO CROCE



IL CORRIDOIO DEI FRATTALI

Abbiamo esposto i nostri lavori nel corridoio della scuola per mostrare a tutti il legame tra matematica, arte e natura



I FRATTALI IN NATURA: IL CAVOLO ROMANO

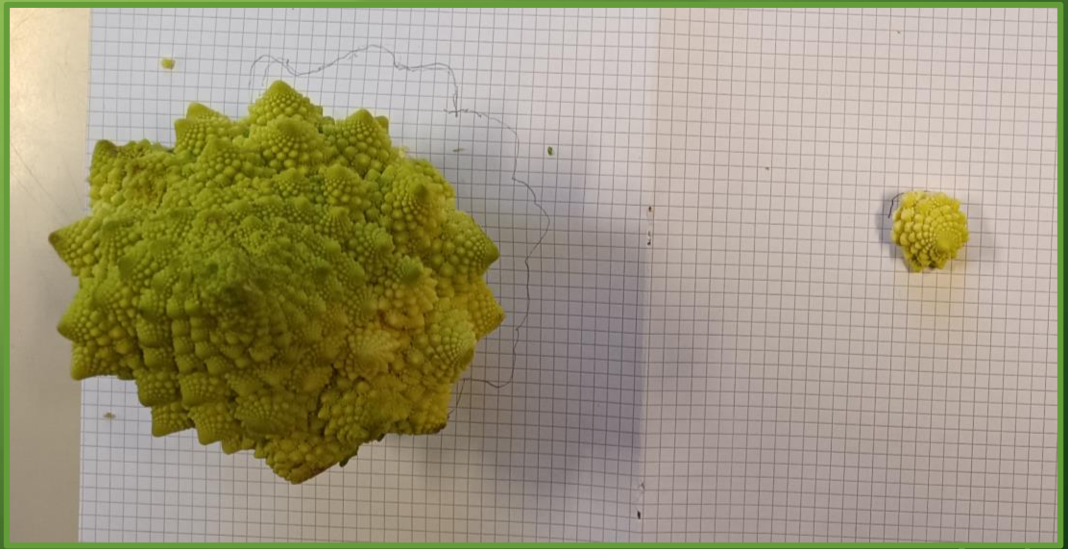
Abbiamo osservato con attenzione un cavolo romano e abbiamo visto che è formato da tante parti simili tra di loro, seppur di dimensioni diverse.

Abbiamo misurato prima il cavolo intero, poi abbiamo ripetuto le misurazioni con una sua parte.

IL CAVOLO ROMANO: MISURAZIONI

Abbiamo misurato l'altezza e la larghezza sia del cavolo intero che della parte che abbiamo scelto.

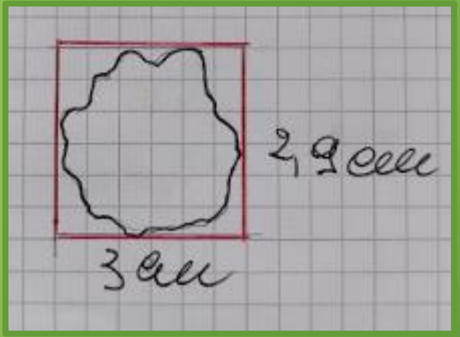
Per la misura dell'altezza abbiamo utilizzato la squadretta, mentre per la misura della larghezza abbiamo disegnato la sagoma su un foglio di carta.

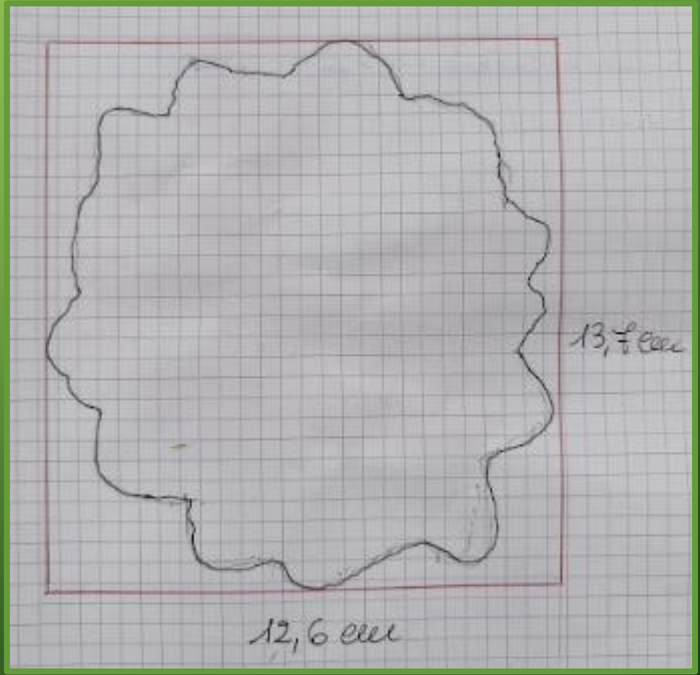


I FRATTALI IN NATURA: MISURAZIONI

Per misurare la larghezza abbiamo disegnato la sagoma e poi abbiamo fatto la media tra le due dimensioni, inscrivendolo in un quadrato.

	Altezza (in cm)	Larghezza (in cm)
Cavolo intero	11	13,15
Parte scelta	2,3	2,95





I FRATTALI IN NATURA: CONFRONTO TRA I DATI

I rapporti tra le due altezze e le due larghezze differiscono di 0,325, mentre i rapporti tra altezza e base differiscono di 0,057.

Possiamo quindi dire che il cavolo intero e la sua parte sono simili, a meno dell'errore dovuto a imprecisioni nella misurazione.

	Altezza (in cm)	Larghezza (in cm)	Rapporto tra altezza e larghezza
Cavolo intero	11	13,15	0,836
Parte scelta	2,3	2,95	0,779
Rapporto tra cavolo intero e sua parte	4,782	4,457	

Ringraziamo i professori Brandi e Salvadori e tutti i collaboratori del progetto M&R, i nostri genitori che ci hanno permesso di partecipare e la professoressa Daniela Favale che ci ha guidati in questo lavoro.