Ma le api hanno ragione?

IC Foscolo Cl. 2L
Prof.ssa Daniela Favale
A.S. 2023/2024

LA GEOMETRIA DELLE API

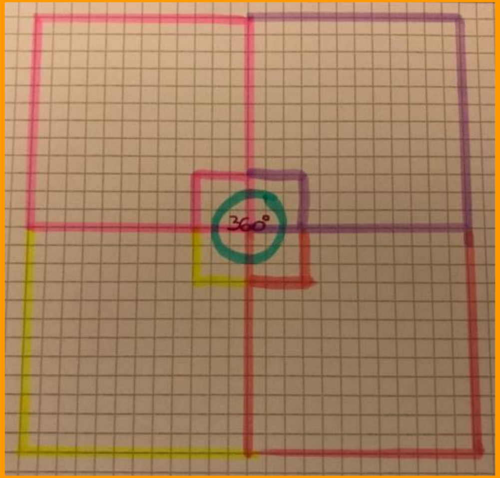
Abbiamo scoperto che le api costruiscono il loro alveare con delle cellette a forma di esagono perchè in questo modo possono utilizzare la minor quantità di cera per costruire le pareti.
Ci siamo chiesti se le api hanno ragione e perché.

TASSELLAZIONI SPERIMENTALI

Abbiamo identificato con dello scotch carta una parte del pavimento del corridoio della nostra scuola.
Abbiamo scelto la forma rettangolare per comodità e praticità.

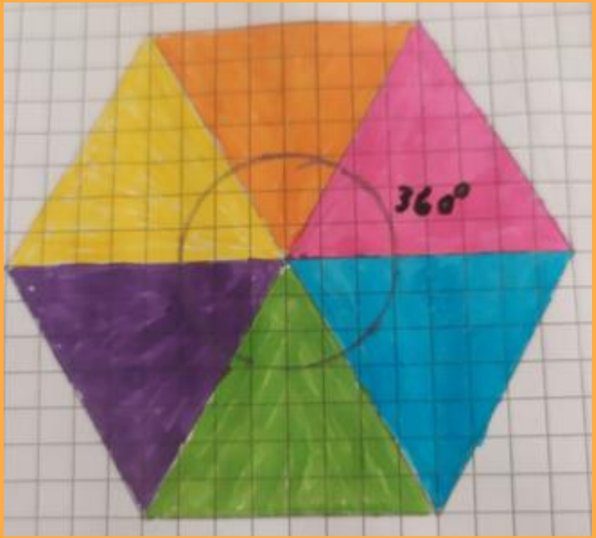
IL QUADRATO

I quadrati ricoprono la superficie senza lasciare spazi vuoti, in ogni vertice si assemblano 4 quadrati che, avendo tutti angoli retti, ricoprono interamente l’angolo di 360°.



IL TRIANGOLO EQUILATERO

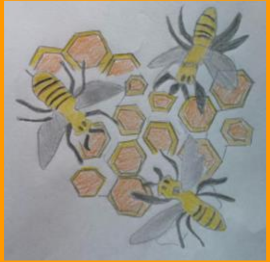
I triangoli equilateri ricoprono la superficie senza lasciare spazi vuoti, in ogni vertice si assemblano 6 triangoli che, avendo tutti angoli di 60°, ricoprono interamente l'angolo di 360°.



L'ESAGONO

Gli esagoni ricoprono la superficie senza lasciare spazi vuoti, in ogni vertice si assemblano 3 esagoni che, avendo tutti angoli di 120°, ricoprono interamente l'angolo di 360°.

IL CERCHIO



I cerchi non ricoprono la superficie senza lasciare spazi vuoti. Sia mettendoli allineati, sia disponendoli alternati, rimangono degli spazi vuoti.

SINTESI

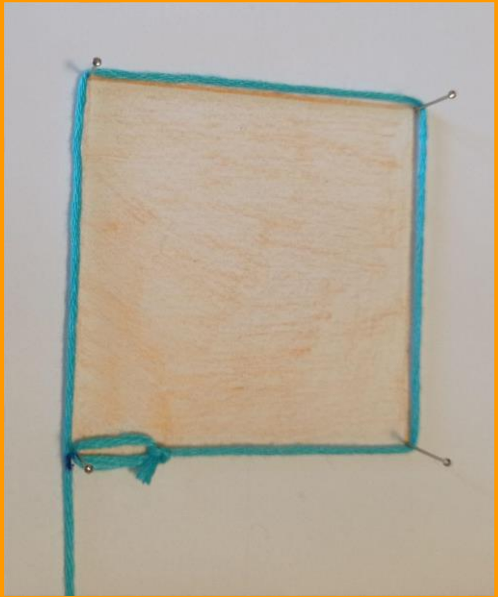
FIGURA PIANA	RICOPRE INTERAMENTE LA SUPERFICIE?	NUMERO DI POLIGONI IN OGNI VERTICE	COSTRUZIONE DELL’ANGOLO GIRO
QUADRATO	SI’	4	90° X 4 = 360°
TRIANGOLO EQUILATERO	SI’	6	60° X 6 = 360°
ESAGONO	SI’	3	120° X 3 = 360°
CERCHIO	NO		

RAPPORTO TRA AREE E PERIMETRI

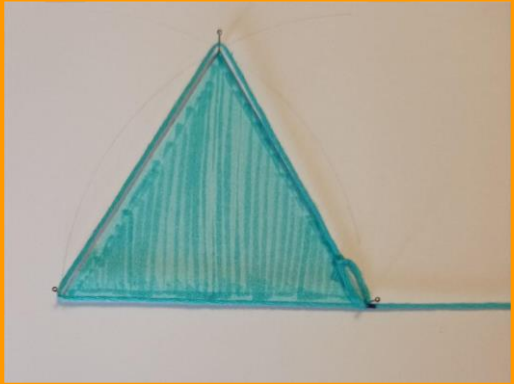
Dato che abbiamo trovato diversi poligoni regolari che possono ricoprire il piano senza lasciare degli spazi vuoti, per cercare di capire la scelta matematica delle api, abbiamo determinato i rapporti tra aree e perimetri dei singoli poligoni.
Abbiamo costruito i poligoni usati nelle piastrellature precedenti con perimetro lungo 24 cm e una circonferenza della stessa misura.
Quindi abbiamo calcolato l’area di ognuno.

RAPPORTO TRA AREE E PERIMETRI

Filo lungo 24 cm



Quadrato col perimetro di 24 cm



Triangolo col perimetro di 24 cm

IC Foscolo Classe 2° L
Ma le api hanno ragione?

RAPPORTO TRA AREE E PERIMETRI

Filo lungo 24 cm

Esagono col perimetro di 24 cm

Circonferenza lunga 24 cm

IC Foscolo Classe 2° L

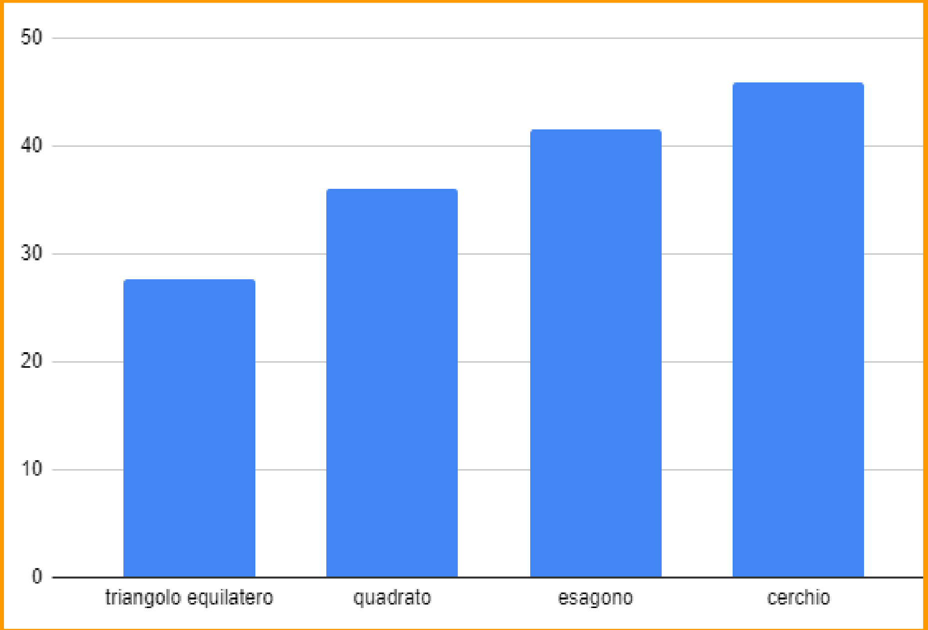
Ma le api hanno ragione?

SE IL PERIMETRO MISURA 24 cm...

FIGURA PIANA	LUNGHEZZA LATO [cm]	AREA [cm^2]
QUADRATO	6	$A = 6^2 = 36\ cm^2$
TRIANGOLO EQUILATERO	8	$h = \frac{\sqrt{3}}{2}8 = 4\sqrt{3} = 4 \cdot 1,73 = 6,92\ cm$ $A = \frac{8 \bullet 6,92}{2} = 4 \bullet 6,92 = 27,68\ cm^2$
ESAGONO	4	$apotema = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = 3,46\ cm$ $A = \frac{24 \bullet 3,46}{2} = 12 \bullet 3,46 = 41,52\ cm^2$
CERCHIO	RAGGIO: 24 : 6,28 = 3,82	$A = 3,82^2 \bullet 3,14 = 45,82\ cm^2$

A PARITA' DI PERIMETRO, LA FIGURA PIANA DI AREA MASSIMA E'…

AREA	in cmq
triangolo equilatero	27,68
quadrato	36
esagono	41,52
cerchio	45,82



I calcoli ci dimostrano che, a parità di perimetro, l'area dei poligoni aumenta con l'aumentare del numero dei lati. Il cerchio (che possiamo immaginare come poligono con infiniti lati) ha l'area massima.

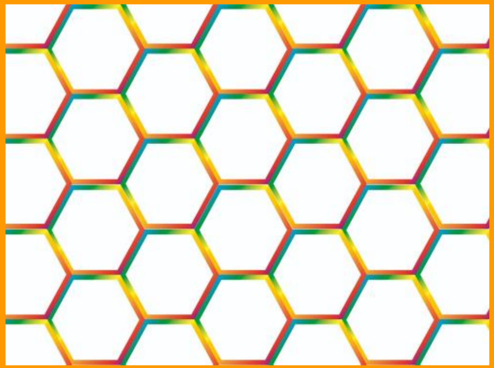
IC Foscolo Classe 2° L

Ma le api hanno ragione?

…MA LE API SCELGONO…

L’esagono è il poligono col maggior numero di lati che ricopre interamente il piano senza lasciare spazi vuoti.

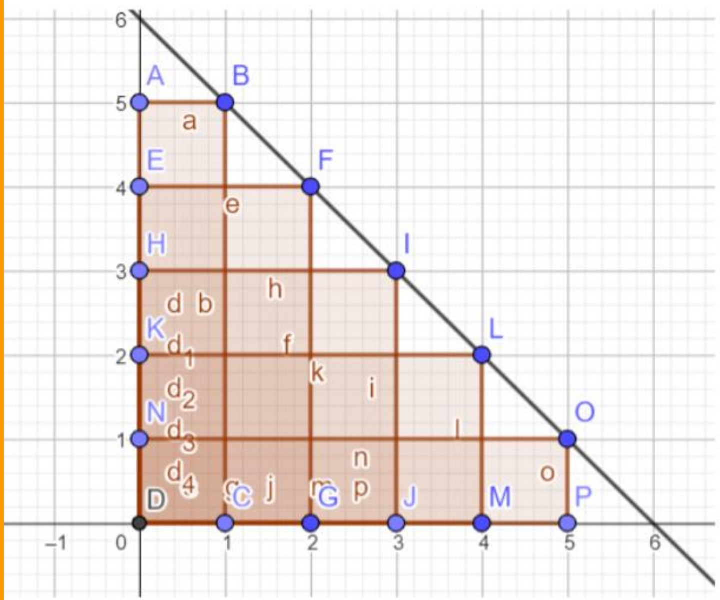
Ecco perché le api lo scelgono!



I RETTANGOLI ISOPERIMETRICI

Abbiamo quindi cercato come variano le aree nel caso dei rettangoli con lo stesso perimetro.

I RETTANGOLI ISOPERIMETRICI: perimetro 12 unità; semiperimetro pari



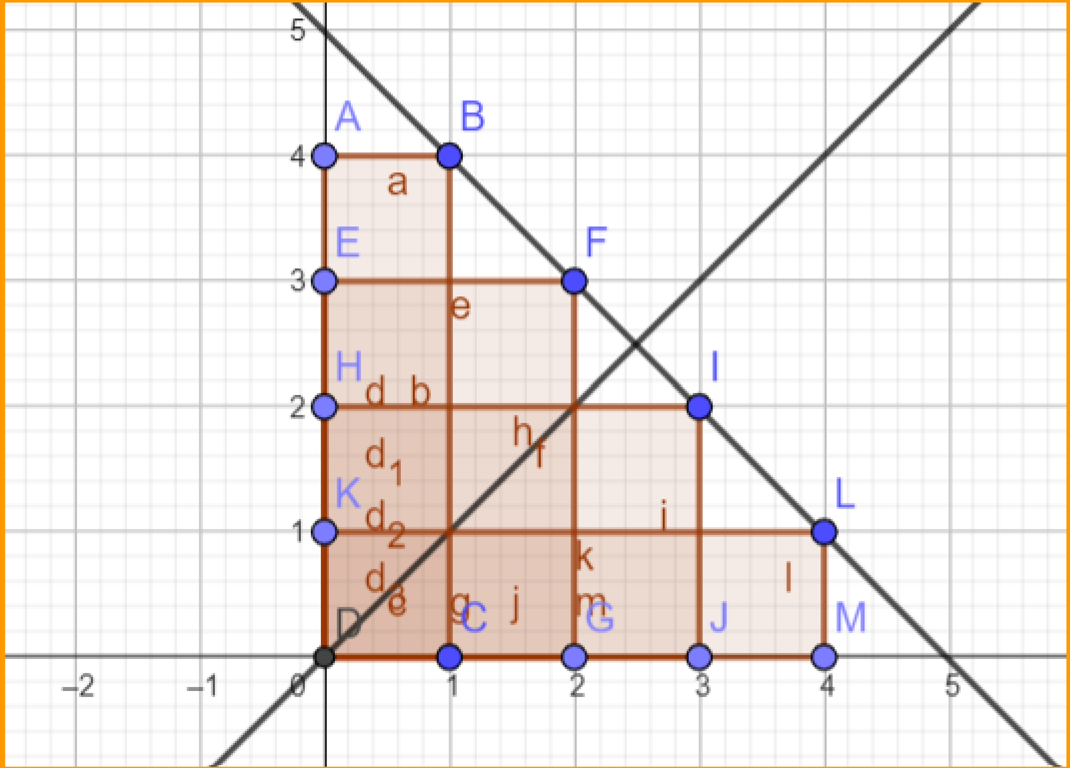
2p	p
12	6

b	h	A
5	1	5
4	2	8
3	3	9
2	4	8
1	5	5

IC Foscolo Classe 2° L

Ma le api hanno ragione?

I RETTANGOLI ISOPERIMETRICI: perimetro 10 unità; semiperimetro dispari



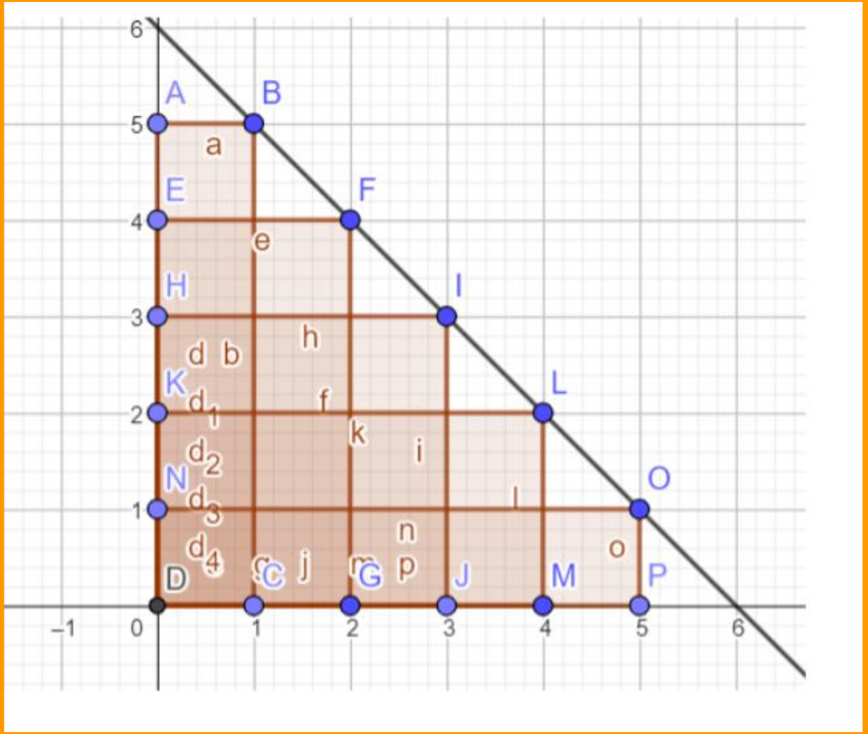
2p	p
10	5

b	h	A
4	1	4
3	2	6
2	3	6
1	4	4

IC Foscolo Classe 2° L

Ma le api hanno ragione?

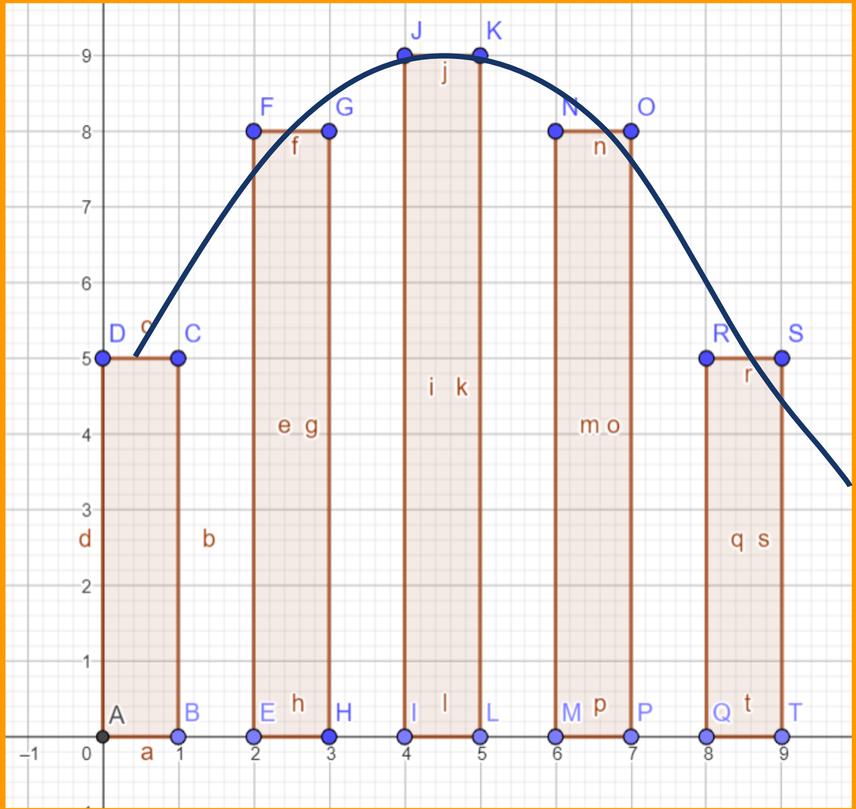
I RETTANGOLI ISOPERIMETRICI: osservazioni



La distribuzione dei rettangoli isoperimetrici ci mostra il quadrato (rettangolo con tutti i lati uguali) nella posizione centrale ed è il rettangolo con l'area maggiore.
Il grafico è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

IC Foscolo Classe 2° L
Ma le api hanno ragione?

I RETTANGOLI ISOPERIMETRICI

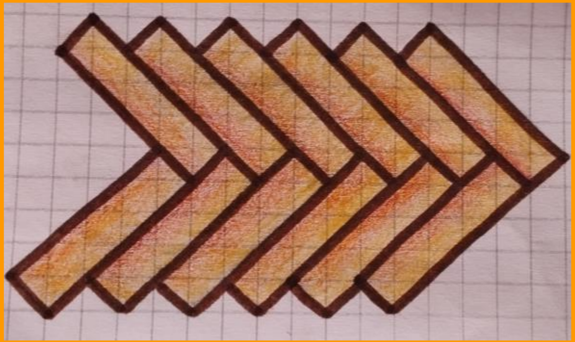


Abbiamo costruito l'istogramma delle aree dei rettangoli isoperimetrici; la disposizione origina un grafico che individua una curva a campana detta gaussiana.

IC Foscolo Classe 2° L

Ma le api hanno ragione?

RETTANGOLI E TASSELLAZIONI



I rettangoli tassellano il piano in quanto lo possono ricoprire tutto senza lasciare spazi perché hanno 4 angoli retti, ma dipende dalle misure dei lati.
In alcuni casi possiamo trovare piastrelle rettangolari messe scalate, in altri casi a lisca di pesce.

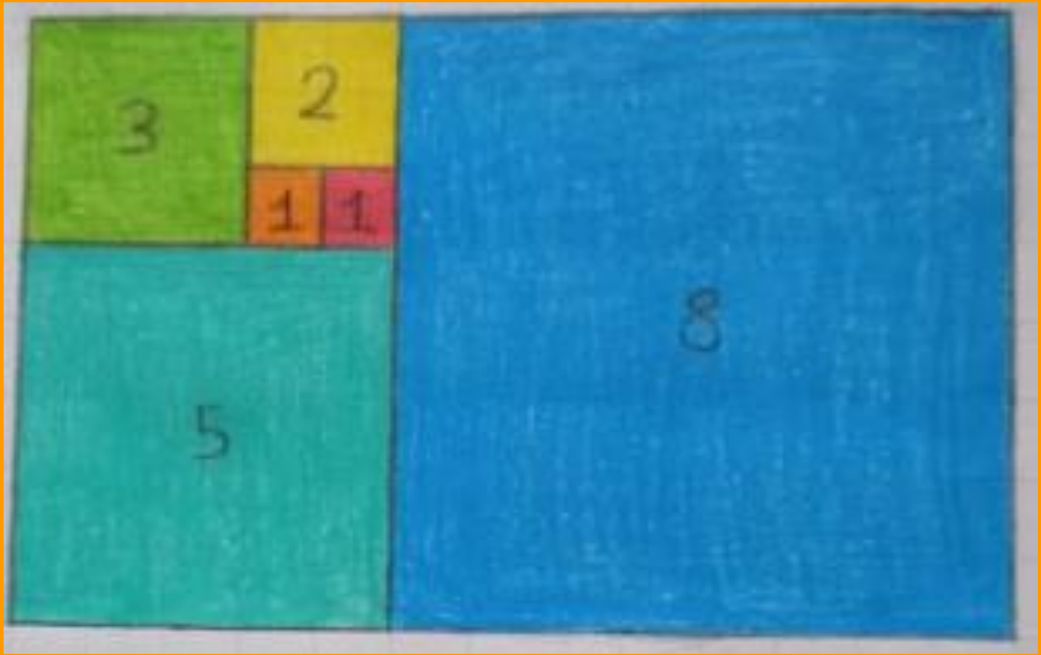
IC Foscolo Classe 2° L

UN RETTANGOLO PARTICOLARE

Abbiamo costruito il rettangolo aureo su carta quadrettata partendo dalla sequenza di Fibonacci.
Questo rettangolo è formato da un quadrato e da un rettangolo simile a quello di partenza.

Sequenza di Fibonacci:
1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - .....

UN RETTANGOLO PARTICOLARE

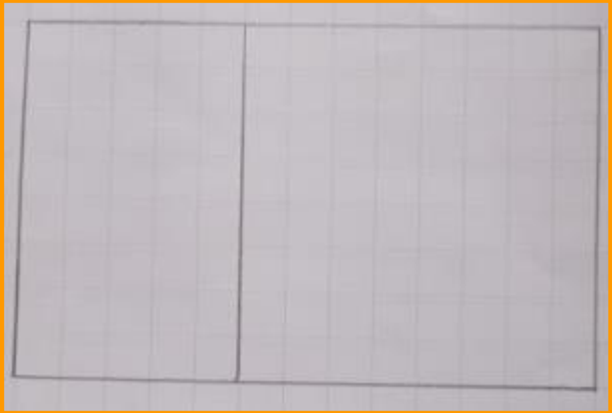


Abbiamo disegnato i quadrati con lunghezza dei lati 1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 e li abbiamo disposti in modo adeguato.

IC Foscolo Classe 2° L

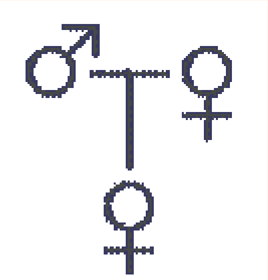
Ma le api hanno ragione?

UN RETTANGOLO PARTICOLARE

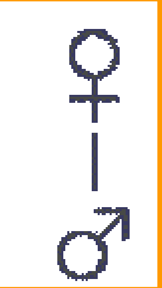


Il rettangolo di partenza è stato suddiviso in un quadrato e un rettangolo.
I due rettangoli sono simili tra di loro e il rapporto tra il lato più lungo e quello più corto è circa 1,6.

I NUMERI DI FIBONACCI E LE API



La regina ha due genitori

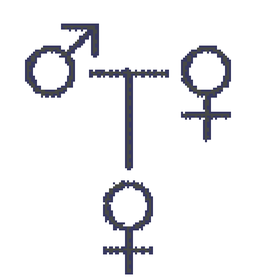


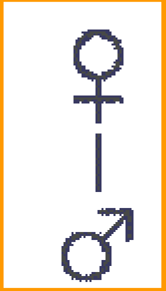
Il fuco ha un solo genitore

Costruendo l'albero genealogico del fuco, si ottengono i numeri di Fibonacci.
Infatti il fuco ha:
1 solo genitore (l'ape regina)
2 nonni (perchè l'ape regina aveva due genitori)
3 bisnonni (perchè sua nonna aveva due genitori, ma suo nonno ne aveva uno solo)
…

IC Foscolo Classe 2° L
Ma le api hanno ragione?

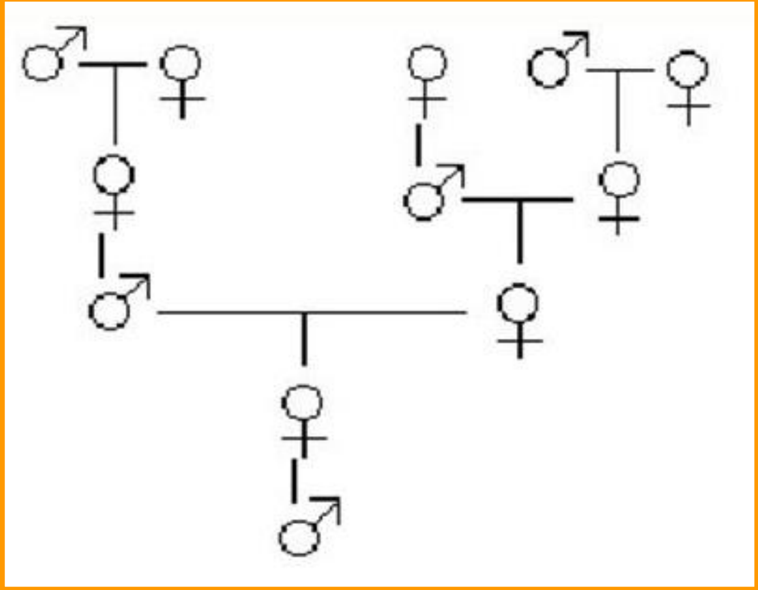
L'ALBERO GENEALOGICO DI UN FUCO





La regina ha due genitori

Il fuco ha un solo genitore



IC Foscolo Classe 2° L

Ma le api hanno ragione?

I NUMERI DI FIBONACCI SULLA MOLE ANTONELLIANA A TORINO

Manifestazione “Luci d’Artista” del 2020: “Il volo dei numeri”, opera di Mario Merz.

La sequenza di Fibonacci è riprodotta con neon rossi sulla Mole Antonelliana.

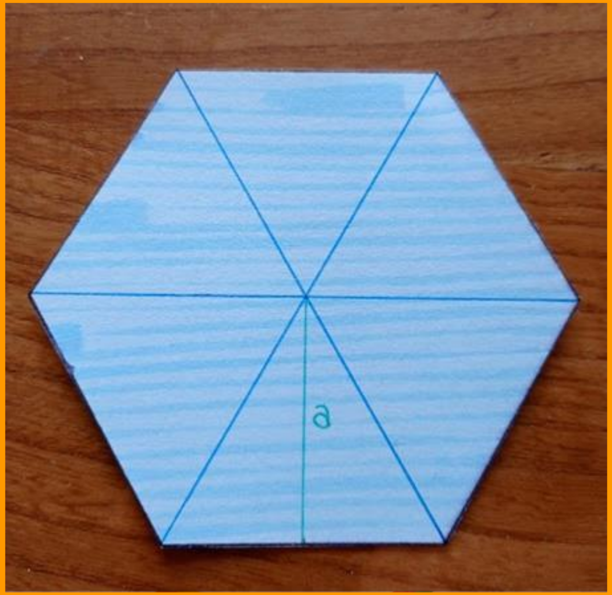
https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fwww.museotorino.it%2Fview%2Fs%2Fd2b8f5aba6ff4fe4ac96143d1e66af2f&psig=AOvVaw3Z1dFgl4Xn359cUwaiZGkG&ust=1711290873663000&source=images&cd=vfe&opi=89978449&ved=0CBIQjRxqFwoTCIjd4rbNioUDFQAAAAAdAAAAABAJ

IC Foscolo Classe 2° L

Ma le api hanno ragione?

TORNANDO ALL'ESAGONO...

L'esagono è il poligono che permette di ricoprire interamente una superficie e che, a parità di perimetro, ha area massima.



PAPPO DI ALESSANDRIA

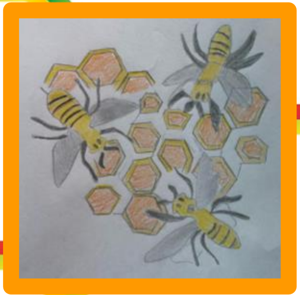
Già Pappo di Alessandria nel 4° sec. aveva intuito che la forma esagonale era la più conveniente ed efficiente per costruire il favo.
E' stato un importante studioso di geometria e quindi negli studi sulle forme dei favi delle api, ha applicato alle scienze le sue conoscenze geometriche.

IC Foscolo Classe 2° L
Ma le api hanno ragione?

THOMAS HALES

Solo nel 1999 il matematico Thomas Hales ha dimostrato definitivamente la “congettura del nido d’ape”: per ripartire uno spazio in parti uguali con il minimo impiego di materiali, la forma migliore è **l’esagono regolare**

LA COSTRUZIONE DELL'ESAGONO CON SCRATCH

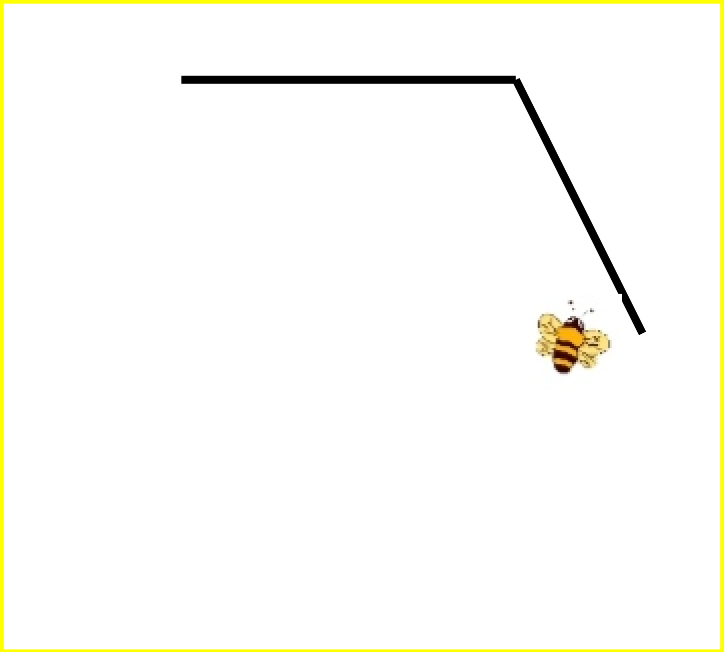


- Ripeti 6 volte
- Ruota di 300°
- Fai 130 passi

IC Foscolo Classe 2° L

Ma le api hanno ragione?

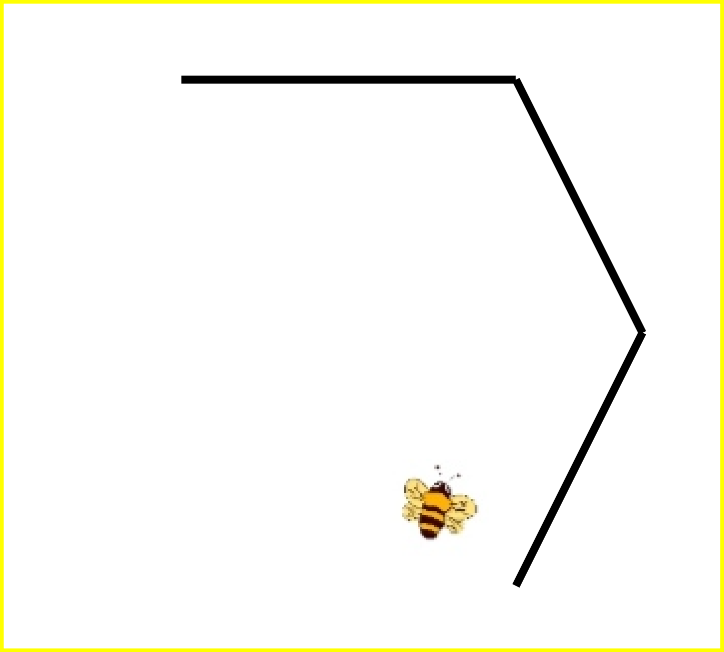
LA COSTRUZIONE DELL'ESAGONO CON SCRATCH



- Ripeti 6 volte
- Ruota di 300°
- Fai 130 passi

IC Foscolo Classe 2° L
Ma le api hanno ragione?

LA COSTRUZIONE DELL'ESAGONO CON SCRATCH

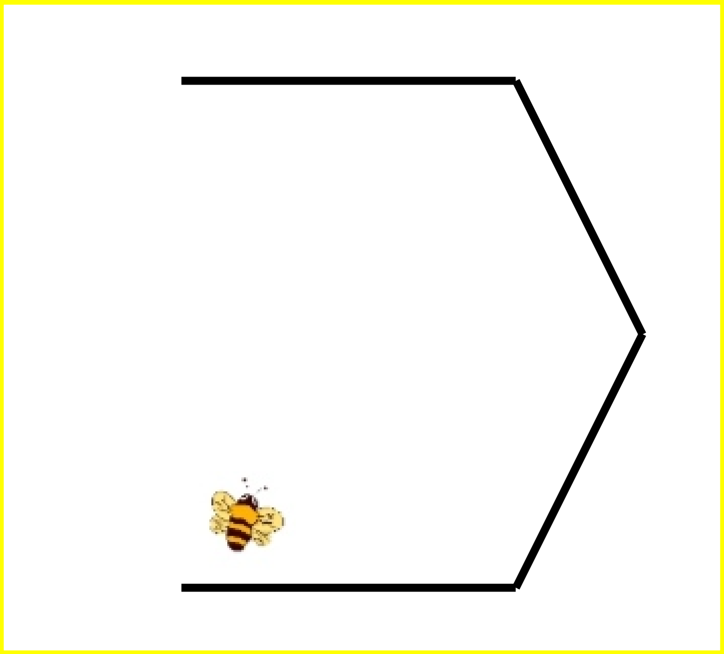


- Ripeti 6 volte
- Ruota di 300°
- Fai 130 passi

IC Foscolo Classe 2° L

Ma le api hanno ragione?

LA COSTRUZIONE DELL'ESAGONO CON SCRATCH

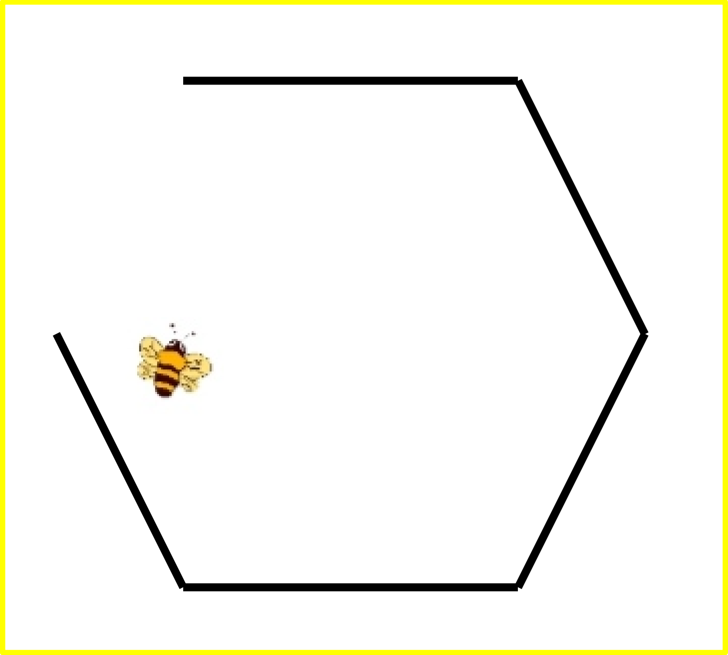


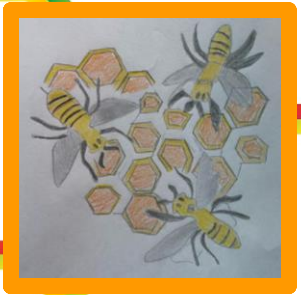
- Ripeti 6 volte
- Ruota di 300°
- Fai 130 passi

IC Foscolo Classe 2° L

Ma le api hanno ragione?

LA COSTRUZIONE DELL’ESAGONO CON SCRATCH



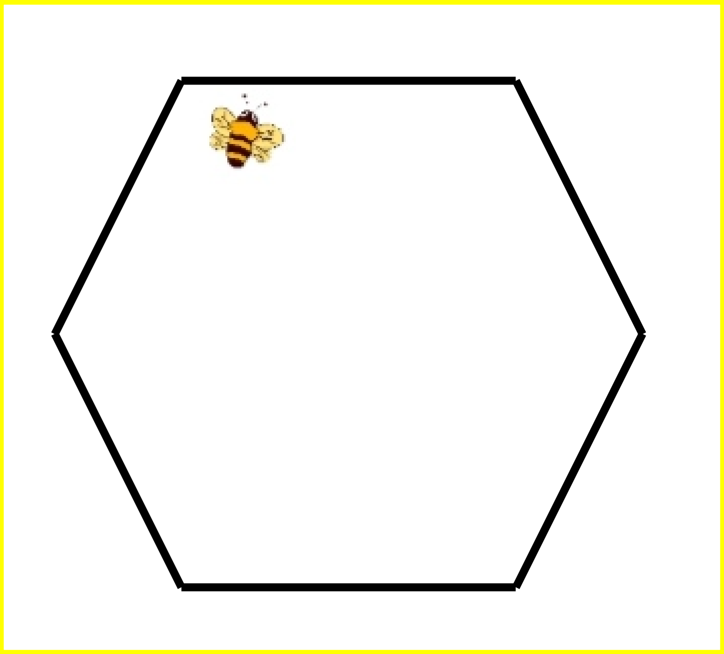


- Ripeti 6 volte
- Ruota di 300°
- Fai 130 passi

IC Foscolo Classe 2° L

Ma le api hanno ragione?

LA COSTRUZIONE DELL'ESAGONO CON SCRATCH



- Ripeti 6 volte
- Ruota di 300°
- Fai 130 passi

IC Foscolo Classe 2° L
Ma le api hanno ragione?

IN CONCLUSIONE…

Le api sono abili matematiche, hanno sviluppato il progetto del favo in modo preciso e ben congeniato.
Come spesso succede in Matematica, da cosa nasce cosa e il discorso si è ampliato.
Le api ci hanno guidato alla scoperta di alcune proprietà geometriche delle figure piane e ci hanno consentito di lavorare in gruppo seguendo l'esempio della loro organizzazione sociale.

RINGRAZIAMENTI

Ringraziamo i professori Brandi e Salvadori e i collaboratori che seguono il Progetto «Matematica e Realtà», i genitori che ci hanno permesso di partecipare e la nostra insegnante Daniela Favale che ci ha seguiti in questo lavoro.