

Le equazioni

Tratto da "CONTACI"
AAVVV Ed. Zanichelli

26 RIVEDIAMO LE EQUAZIONI

Abbiamo rivisto alcuni concetti visti l'anno scorso:

- un'**equazione** è un'uguaglianza tra due espressioni, di cui almeno una letterale
- la **soluzione** di un'equazione è un numero che sostituito all'incognita rende vera l'uguaglianza tra le due espressioni
- per **verificare** se un numero soddisfa un'equazione basta sostituirlo al posto dell'incognita e svolgere i calcoli.

Esempio

Verifica se il numero 3 è una soluzione dell'equazione $6(2x - 1) = 10x$

$$6(2 \cdot \boxed{3} - 1) = 10 \cdot \boxed{3}$$

$$12 \cdot \boxed{3} - 6 = 10 \cdot \boxed{3}$$

$$12 \cdot \boxed{3} - 10 \cdot \boxed{3} = 6$$

$$36 - 30 = 6 \quad \boxed{OK}$$

27 RISOLVERE UN'EQUAZIONE

Per risolvere un'equazione si devono separare le incognite dai termini noti, usando i **principi di equivalenza**.

Primo principio di equivalenza

Se si aggiunge o si sottrae uno stesso numero o una stessa espressione letterale a entrambi i membri dell'equazione, si ottiene un'altra equazione che ha la stessa soluzione dell'equazione precedente, cioè è equivalente.

Secondo principio di equivalenza

Se si moltiplica o si divide per uno stesso numero o una stessa espressione letterale (diversi da zero) entrambi i membri dell'equazione, si ottiene un'equazione equivalente.

28 EQUAZIONI DETERMINATE, INDETERMINATE, IMPOSSIBILI

Per velocizzare la risoluzione di un'equazione si può usare la **regola del trasporto**.

Un termine di un'equazione può essere spostato da un membro all'altro, purché lo si cambi di segno.

Esempio

$$4y - 3 = y + 21$$

$$4y - y = 21 + 3$$

$$3y = 24 \quad || :3$$

$$y = 8$$

Quando si risolve un'equazione di primo grado si può verificare uno dei seguenti casi:

- l'equazione è **determinata**, ovvero ammette una soluzione, un numero che sostituito all'incognita soddisfa l'uguaglianza.
- l'equazione è **impossibile**: risolvendola, l'equazione si riduce alla forma $0 \cdot x = n$ ($n \neq 0$). Nessun numero sostituito all'incognita soddisfa l'uguaglianza, pertanto l'equazione non ha soluzione.
- l'equazione è **indeterminata**: risolvendola, l'equazione si riduce alla forma $0 \cdot x = 0$. Qualunque numero sostituito all'incognita soddisfa l'uguaglianza, pertanto l'equazione ha infinite soluzioni.

Esempi

L'equazione $0 \cdot x = 0$ è soddisfatta da tutti i numeri.

L'equazione $0 \cdot x = 5$ non è soddisfatta da alcun numero.

29 EQUAZIONI CON IL DENOMINATORE

Per eliminare i denominatori da un'equazione si può

Modo 1

Portare tutti i termini dell'equazione allo stesso minimo comune multiplo e poi moltiplicare i due membri dell'equazione per questo numero.

Modo 2

Moltiplicare i due membri dell'equazione direttamente per il minimo comune multiplo.

Esempio

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} + \frac{x}{3} &= 10 \\ 3) \frac{x}{2} + 2) \frac{x}{3} &= \frac{6}{1} 10 \\ \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} &= \frac{60}{6} \quad || \cdot 6 \\ 3x + 2x &= 60 \\ 5x &= 60 \quad || : 5 \\ x &= 12\end{aligned}$$

Esempio

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} + \frac{x}{3} &= 10 \quad || \cdot 6 \\ 6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} &= 6 \cdot 10 \\ 3x + 2x &= 60 \\ 5x &= 60 \quad || : 5 \\ x &= 12\end{aligned}$$

30 DUE INCOGNITE

Abbiamo risolto problemi con l'utilizzo di due incognite.

Esempio

La somma di due numeri è 5 e la loro differenza è 3. Trova i due numeri.

Queste informazioni si possono scrivere sotto forma di un sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Trovare la soluzione di un sistema di equazioni significa trovare la coppia di valori che soddisfa sia la prima sia la seconda equazione.

$x + y = 5$	
x	y
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0

$x - y = 3$	
x	y
5	2
4	1
3	0
2	-1
1	-2

I numeri sono $x = 4$ e $y = 1$, perché $4 + 1 = 5$ e $4 - 1 = 3$.

31 COME ELIMINARE UNA DELLE INCOGNITE

Per risolvere un sistema di equazioni si può agire in questo modo:

- si moltiplica una o entrambe le equazioni per un numero, in modo che i coefficienti di una delle incognite diventino opposti nelle due equazioni.
- si sommano le equazioni membro a membro e si ottiene un'equazione in una sola incognita.

Esempio

$$\begin{cases} x + 5y = 9 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \quad || \cdot 5$$

$$\begin{cases} x + 5y = 9 \\ 10x - 5y = 35 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 11x = 44 \\ x = 4 \end{array} \quad || : 11$$

Sostituiamo $x = 4$ nella prima equazione.

$$\begin{aligned}4 + 5y &= 9 \\ 5y &= 9 - 4 \\ 5y &= 5 \\ y &= 1\end{aligned}$$

Il sistema è soddisfatto dai numeri $x = 4$ e $y = 1$.

32 DUE MODI PER RISOLVERE UN SISTEMA DI EQUAZIONI

Un sistema di equazioni si può risolvere in due modi.

Metodo di addizione (vedi esempio della lezione precedente.)

Metodo di sostituzione: si risolve una delle equazioni rispetto a una delle incognite e si sostituisce l'espressione all'interno dell'altra equazione.

Esempio

$$\begin{cases} 5x - y = 2 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}5x - (3x - 4) &= 2 \\ 5x - 3x + 4 &= 2 \\ 2x &= 2 - 4 \\ 2x &= -2 \quad || : 2 \\ x &= -1\end{aligned}$$

Sostituiamo $x = -1$ nella seconda equazione.

$$\begin{aligned}y &= 3 \cdot (-1) - 4 \\ &= -7\end{aligned}$$

Il sistema è soddisfatto dai numeri $x = -1$ e $y = -7$.

33 PROBLEMI RISOLVIBILI CON LE EQUAZIONI

Nella lezione si usano le equazioni per risolvere i problemi. Come per i problemi visti in precedenza è importante capire quale dato conviene indicare con l'incognita. Inoltre, a questo punto, si può decidere se il problema è risolvibile con una sola equazione o con un sistema di equazioni. Talvolta entrambe le strade sono possibili.